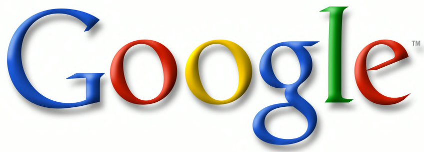
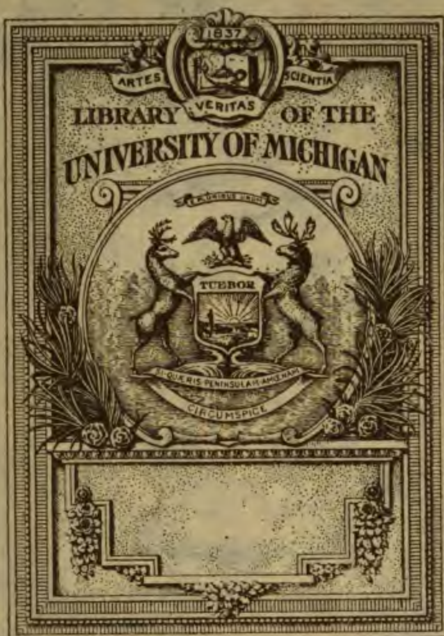



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

du Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.

Secrétaire général : H. PIÉRON, Agrégé de l'Université.

BIBLIOTHÈQUE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE ET GÉNIE

Directeur : M. D'OCAGNE

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées
Répétiteur à l'École polytechnique.

BALISTIQUE INTÉRIEURE

BALISTIQUE INTÉRIEURE

PAR

Le Commandant P. CHARBONNIER
CHEF D'ESCADRON D'ARTILLERIE COLONIALE

Avec 48 figures dans le texte

PARIS
OCTAVE DOIN, ÉDITEUR
8, PLACE DE L'ODÉON, 8

1908

ERRATA

Page 8, *ligne* 5 :

Au lieu de : D Bouchon, mettre : B Bouchon.

Page 62, *ligne* 5 :

Dans le crochet de la formule, mettre :

$$\left[\sqrt{P'} - \sqrt{P' - P}\right]^2$$

Page 133, *ligne* 6 :

Ecrire la formule comme il suit :

$$\frac{1}{2g}\left[(p + \vartheta\varpi)\, v^2 + \pi v'^2\right]$$

Page 133, *lignes* 8 et 13 :

Au lieu de : $\left(1 + \frac{\pi}{p + \vartheta\varpi}\right)$, mettre : $\left(1 + \frac{p + \vartheta\varpi}{\pi}\right)$

Page 145, *équation* (2) :

Au lieu de : $\frac{dz}{dz}$, lire : $\frac{dz}{dt}$.

Page 160, *ligne* 7 :

Ecrire : $dv = \frac{\sigma}{A\mu} \frac{dz}{\varphi(z)}$

Page 180, *ligne* 5 :

Rétablir ϖ' au dénominateur.

Page 181, *ligne* 20 :

Ajouter : cubes.

Page 221, *lignes* 18 et 19 :

Au lieu de : θ, mettre : ϑ

ERRATA

Page 223, *lignes* 6, 19, 21, 21 et 24 :
Au lieu de : 0, mettre : ϑ

Page 286, *ligne* 4 :
Supprimer le signe + devant $\frac{df}{f}$

Page 308, *ligne* 12 :
Lire : devront, au lieu de : devont

Page 336, *ligne* 18 :
Au lieu de : conversation, lire : conservation

BALISTIQUE INTÉRIEURE

INTRODUCTION

1. **Objet de la Balistique Intérieure.** — La *Balistique Intérieure* se propose l'étude des phénomènes *mécaniques* qui se passent dans la bouche à feu pendant le très court espace de temps (de l'ordre du $\frac{1}{100}$ de seconde) compris entre l'inflammation de l'étoupille et la sortie du projectile de la bouche du canon, limite où commence le domaine de la Balistique Extérieure.

Avant la mise de feu à la charge, l'énergie de la poudre, qui va se transformer presque instantanément en énergie cinétique, est à l'état potentiel. En amont de la Balistique Intérieure, c'est la *Théorie des Explosifs*, science physico-chimique, qui étend son domaine, prend la poudre dès la combinaison de ses éléments constitutifs, en explique les propriétés et en calcule, *à priori*, la puissance.

Pour nous, dans le présent ouvrage, la poudre est, simplement, une substance quelconque, dont nous ignorons volontairement la composition, mais qui, excitée d'une certaine manière, émet des gaz dans le récipient où elle est enfermée. L'objet de la Balistique Intérieure sera de déterminer expérimentalement les lois de cette émission, d'évaluer les forces qui en résultent à chaque instant et

de calculer par l'analyse les effets produits sur le projectile auquel ces forces sont appliquées.

La grandeur des forces en jeu, la rapidité de leur production, la difficulté de leur mesure donnent évidemment à la Balistique Intérieure une place à part dans les applications de la Mécanique aux phénomènes naturels.

On verra comment on parvient cependant, non seulement à déterminer l'effet total du phénomène, mais encore à en mesurer expérimentalement et à en calculer théoriquement toutes les circonstances de détail, la vitesse du projectile et la pression dans l'âme en chaque point du parcours, la quantité de poudre brûlée au même instant et la loi suivant laquelle cette poudre brûle; on peut ainsi se rendre maître des effets produits et on sait les diriger comme on veut, en vue des applications pratiques.

La Balistique Intérieure, traitant du mouvement d'un corps qui a, avec les objets extérieurs, un grand nombre de contacts de nature fort variée doit faire appel à de nombreuses lois expérimentales. C'est donc une science aussi physique que mécanique.

Dans cet ouvrage, nous avons cherché à faire entrer la science de la Balistique Intérieure plus avant dans la voie rationnelle. Nous entendons par là, non pas l'avoir rendue plus mathématique et plus théorique (ce qui peut n'être pas un progrès en soi), mais avoir assis ses bases, qui sont les lois fondamentales qu'elle admet et les équations différentielles qui les traduisent, sur un terrain physique et expérimental plus solide; sur ces bases assurées, la

théorie peut, pour se développer, prendre un plus ferme point d'appui.

Nous avons divisé ce Traité de Balistique Intérieure en trois parties.

2. **Première partie. Pyrostatique.** — La *Pyrostatique* traite de la combustion des poudres en vase clos et des lois de cette combustion. Leur recherche expérimentale est rendue possible par l'emploi d'ingénieux appareils qui permettent d'enregistrer la pression développée en fonction du temps.

Trois lois physiques peuvent ainsi être établies :

1° *Une loi de correspondance des pressions maxima et des charges*, dite loi de Noble et Abel, qui montre que les lois des gaz parfaits, aux très hautes pressions, s'appliquent aux gaz de la poudre.

2° *Une loi réglant le mode de combustion de la poudre suivant la forme et la disposition des brins de la charge* qui indique de quelle manière varie, avec le temps, le poids de la poudre brûlée. Nous avons introduit, dans cette question, la notion nouvelle d'une quantité physique dite *fonction de forme* et montré comment elle pouvait être déterminée par expérience.

3° *Une loi de correspondance du mode de combustion et de la pression.* Nous avons pu établir des théorèmes nouveaux permettant la détermination précise de cette loi, par des expériences convenables.

En possession de ces trois lois expérimentales, qui suffisent pour traiter complètement, par l'analyse, le pro-

blème de la combustion de la poudre en vase clos, il a été possible de définir les *caractéristiques* des poudres, comme leur *force*, leur *forme*, leur *vivacité*, etc.

Ces nombres, que l'expérience dans une bombe permet de déterminer avec facilité et précision, sont nécessaires pour pouvoir aborder la théorie des effets de la poudre dans le canon.

Dans un très important mémoire « Sur le mode de combustion des substances explosives », M. Vieille[1] avait étudié les mêmes problèmes.

Les conclusions auxquelles nous sommes arrivé dans nos études de Pyrostatique expérimentale, ne sont pas toujours en accord avec celles de M. Vieille. Une interprétation nouvelle des phénomènes physiques qui se passent lors de la combustion de la poudre, ou, si l'on veut, le choix des hypothèses initiales, nous a conduit à représenter sous une forme très générale les lois de la Pyrostatique et à donner aux résultats des mesures expérimentales une signification en accord avec ces lois. Il y a lieu, pour nous, toutefois, de ne pas oublier que non seulement les instruments dont nous nous sommes servi (y compris la poudre elle-même), mais aussi les méthodes de recherches, sont dues à cet éminent expérimentateur.

3. **Deuxième partie. Pyrodynamique physique.** — La *Pyrodynamique physique* étudie le mode de combustion de la poudre dans le canon et la détente des gaz produits ; la discussion des phénomènes observés, l'indication des

[1] Vieille. **3.**

expériences, la distinction du problème principal et des problèmes secondaires, l'énumération de ceux-ci et l'examen de leur importance, le choix d'une fonction de détente, l'interprétation de cette fonction au regard de la Thermodynamique, etc., sont des questions que nous devons examiner avec détail et qui doivent conduire à l'adoption des équations différentielles du mouvement principal.

Une interprétation physique d'une savante théorie due au capitaine Hugoniot, nous a conduit à la notion de la *veine gazeuse* des produits de la combustion qui paraît éclairer bien des phénomènes obscurs rencontrés dans le tir; c'est ainsi que nous avons pu donner une théorie nouvelle de l'*usure* des canons.

4. **Troisième partie. Pyrodynamique rationnelle.** — La *Pyrodynamique rationnelle* ou *Balistique Intérieure proprement dite*, prend les équations différentielles établies précédemment et applique à leur intégration et à leur discussion les procédés rigoureux de l'analyse.

Les équations différentielles que nous admettons ne diffèrent de celles employées par la plupart des auteurs qui ont traité de la Balistique Intérieure que par leur plus grande généralité.

Nous sommes parvenu à les intégrer rigoureusement : 1° en laissant arbitraire la *fonction de forme* qu'on demandera à l'expérience et qui caractérise l'espèce de poudre employée; 2° en introduisant une variable, la *pression initiale de forcement*, dont l'influence est extrê-

mement importante et qui n'avait jamais été prise en considération jusqu'ici.

Au point de vue des applications pratiques, les formules qui dérivent de nos théories sont d'une simplicité extrême et d'une généralité d'hypothèses qui les forcent, pour ainsi dire, à se prêter facilement et fidèlement à la représentation des faits expérimentaux les plus divers, quand on aura une détermination suffisamment exacte des *caractéristiques* de la poudre et de celles de la bouche à feu.

5. **Les principales théories de la Balistique Intérieure.** — La théorie de la Balistique Intérieure que nous donnons dans cet ouvrage, présente un caractère de généralité tel qu'on peut considérer comme des cas particuliers la plupart des travaux importants qui ont paru sur cette science, c'est-à-dire les théories du général Sébert et du capitaine Hugoniot, du général Moisson, du colonel Mata et du capitaine Hoesen.

Nous consacrons, en outre, un chapitre à l'étude d'une hypothèse un peu différente à laquelle se rattachent les travaux de M. Sarrau, du colonel Jacob, du général Gossot et de M. l'ingénieur des Poudres et Salpêtres Liouville. Nous montrons qu'il est possible, d'ailleurs, de réunir par le lien d'une théorie générale ces deux branches de la Balistique Intérieure.

PREMIÈRE PARTIE

PYROSTATIQUE

CHAPITRE PREMIER

LES LOIS DE LA COMBUSTION DES POUDRES

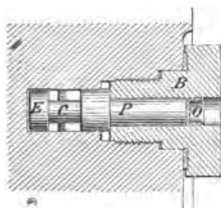
§ I. — La loi de Noble et Abel.

6. **Bombes d'expériences.** — La *Pyrostatique* se propose de déterminer les lois élémentaires de la combustion de la poudre en introduisant dans le phénomène, malgré son extrême rapidité, la notion du temps et par suite de progressivité des effets produits. La mesure des forces engendrées par une explosion en vase clos et la recherche de leur développement en fonction du temps constituent les deux objets principaux de la Pyrostatique expérimentale.

Il ne sera pas question ici de la théorie des instruments qui servent à ces expériences[1]. On rappellera seulement

[1] La description et la théorie des appareils de mesure des pressions de la poudre, qui constitue la *Pyromanométrie*, sera développée dans un autre volume de l'Encyclopédie scientifique.

que les pressions de la poudre se mesurent ordinairement par l'écrasement permanent que subit un petit cylindre de cuivre dit *crusher* disposé dans le vase d'explosion comme l'indique la figure ci-dessous.



D Bouchon vissé dans la bombe
P Piston en acier,
O Obturateur en cuivre,
E Enclume en acier,
C Crusher en cuivre.

Fig. 1.

On admettra ici qu'on sait faire correspondre à chaque écrasement mesuré du *crusher*, au moyen d'une *table de tarage*, la pression réelle qui lui a été appliquée par les gaz de la poudre.

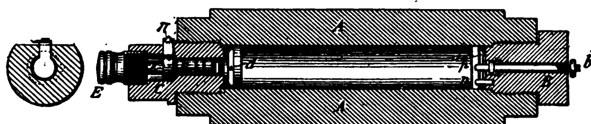


Fig. 2.

Les expériences en vase clos se font ordinairement dans une *bombe* dite des PS (Poudres et Salpêtres), du modèle qui a servi aux importantes expériences de MM. Sarrau[1] et Vieille[2] sur les explosifs. C'est un cylindre en acier fermé à une extrémité par un *bouchon de mise de feu*, et à

[1] Sarrau, **7**. p. 188.
[2] Vieille, **3**, p. 263.

l'autre par un *bouchon-crusher*. L'écrasement du crusher est enregistré, par une plume fixée au piston, sur un cylindre tournant dont la vitesse est mesurée par la sinusoïde d'un diapason électrique vibrant.

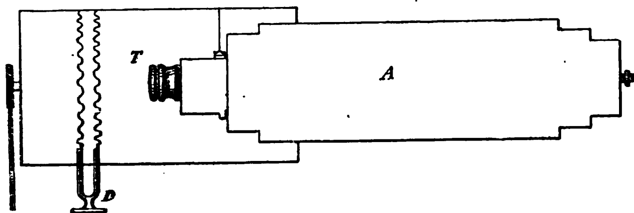


Fig. 3.

On obtient ainsi, pour une explosion donnée, la courbe des écrasements du crusher en fonction du temps, d'où on déduira, au moyen de la table de tarage, la courbe (P, t) des pressions développées en fonction du temps.

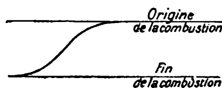


Fig. 4.

7. **La loi de Noble et Abel.** — *a*) Les premières recherches (1792), sur la tension maximum des gaz de la poudre sont dues à Rumford[1] à l'arsenal de Munich ; il vit que la pression maximum P' croit plus vite que la densité de chargement $\Delta = \frac{\varpi}{c'}$, ($\varpi$ poids de la charge en kilogrammes ; c', volume de la bombe en décimètres cubes), c'est-à-dire plus vite que ne l'indiquerait la loi de Mariotte.

b) Vers 1870, la Commission anglaise des substances

[1] Noble et Abel, p. 355.

explosives (Noble et Abel)[1] reprit la question ; des expériences très systématiques et très complètes furent faites.

En ce qui concerne la relation entre la pression maximum et la charge, MM. Noble et Abel exprimèrent les résultats trouvés par la formule

$$P' = f\frac{\varpi}{c' - \eta\varpi}$$

ou bien :

$$P' = f\frac{\Delta}{1 - \eta\Delta}.$$

Dans ces formules :

1° P' est la *pression maximum* en kilogrammes par centimètre carré ;

2° Δ est la *densité de chargement* telle que $\Delta = \frac{\varpi}{c'}$.

3° f est un coefficient dit *force de la poudre*, pression maximum en vase clos, en kilogrammes par centimètre carré, d'une poudre tirée à une densité de chargement, telle que $1 - \eta\Delta = \Delta$, c'est-à-dire $\Delta = \frac{1}{1 + \eta}$.

4° η est un coefficient numérique.

Les expériences de Noble et Abel portaient sur la *poudre noire* ; ils interprétaient le produit $\eta\varpi$ comme représentant le volume occupé par la portion solide de la poudre qui ne passe pas à l'état gazeux. Le reste des produits de la combustion de la poudre est formé de gaz permanents, et, si ceux-ci suivent la loi de Mariotte dans l'espace qui leur est réservé et qui est égal à $c' - \eta\varpi$, on obtient bien la formule $P' = f\frac{\Delta}{1 - \eta\Delta}$.

[1] NOBLE et ABEL, p. 437.

La valeur de η était trouvée sensiblement égale à 0,6, ce qui représente l'inverse de la densité de la poudre noire.

8. **Travaux de M. Sarrau.** — Mais, quand, au lieu de la poudre noire, on emploie un autre explosif, par exemple un explosif chimique qui se convertit totalement en gaz, on trouve une expression de même forme

$$p' = f\frac{\Delta}{1 - \eta\Delta},$$

où f et η varient suivant l'explosif expérimenté.

Au laboratoire des Poudres et Salpêtres, MM. Sarrau, Berthelot, Vieille[1] ont déterminé les valeurs de f et de η des divers explosifs.

L'interprétation de MM. Noble et Abel ne pouvant plus être admise dans ce cas, M. Sarrau a rapproché cette équation expérimentale de l'équation des gaz parfaits, mise sous la forme

$$p = \frac{RT}{v - \alpha}$$

p, pression des gaz;
v, volume qu'ils occupent;
α, coefficient;
R, coefficient numérique;
T, température absolue.

C'est le premier terme de la relation complète, dont l'autre terme tend vers zéro, pour les très hautes températures de l'explosion.

Comme la température de combustion de l'explosif, qui est la température correspondant à un changement d'état, doit être considérée comme constante, les deux for-

[1] SARRAU, 7. p. 191.

mules, — théorique des gaz parfaits, expérimentale de Noble et Abel — coïncideraient dans leur forme. D'autre part, le calcul, en partant des éléments gazeux trouvés et de la valeur de leur chaleur spécifique, est capable de reproduire les valeurs de f et de η expérimentales.

On peut donc ainsi rattacher les lois de la combustion en vase clos aux propriétés physiques et chimiques des gaz parfaits; mais c'est là l'objet particulier d'une autre science, la *Théorie des Explosifs*, dont nous n'avons point à nous occuper ici.

Le coefficient η qui prend dans cette théorie le nom, que nous lui conserverons, de *covolume*, s'interprète, pour les corps gazeux, comme l'inverse de la densité des molécules gazeuses; on énonce alors la loi de Noble et Abel, pour les gaz, en disant qu'ils suivent la loi de Mariotte, à condition de retrancher du volume de la capacité où ils se produisent, le volume occupé par les molécules gazeuses.

9. **Expériences du LCM**[1]. — L'intérêt d'une détermination précise des deux caractéristiques f et η de la loi de Noble et Abel, pour les poudres usuelles, a conduit à instituer au LCM une série systématique d'expériences, portant sur toute l'échelle des poudres de la Marine et s'étendant jusqu'aux pressions de 4000 kilogrammes par centimètre carré.

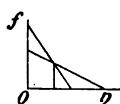


Fig. 5.

On en trouvera le détail dans le *Mémorial de l'Artillerie de la Marine*[2].

Pour déterminer pratiquement, d'après un grand nombre d'expériences, les valeurs de f et de η, on peut construire la droite

[1] LCM : Laboratoire central de la Marine, à Paris.
[2] Ch. 3.

$P'(1 - \eta\Delta) = f\Delta$ dans un système d'axes sur lesquels on portera, pour chaque expérience, les valeurs de η et f.

S'il existe un point d'intersection commun à toutes ces droites, cela prouve que la loi de Noble et Abel est vérifiée. Les coordonnées de ce point commun donnent immédiatement les valeurs de η et de f.

On a trouvé : 1° que la valeur de f variait légèrement avec les Poudres B, étant plus grande pour les vives que pour les lentes, de $f = 10350$ à $f = 9350$ environ ; c'est une question de différence dans les procédés de fabrication et la composition chimique ;

2° Que η avait une valeur qu'on pouvait prendre très sensiblement égale à 1. La Théorie des Explosifs conduit d'ailleurs à une valeur voisine pour les cotons-poudres.

10. **Remarques sur la formule de Noble et Abel.** — Si les expériences dont il vient d'être question, vérifiant bien l'équation de Noble et Abel, paraissent s'interpréter par la loi du covolume et la théorie des gaz, une assimilation complète et rigoureuse n'est pas sans présenter quelques difficultés.

En effet, la formule

$$P' = f\frac{\Delta}{1 - \eta\Delta}$$

donne pour la courbe (P', Δ) une asymptote correspondant à la valeur $\Delta = \frac{1}{\eta}$, c'est-à-dire que, pour une charge $\varpi = \frac{c'}{\eta}$, la pression P' serait infinie.

Or, rien ne s'oppose à ce qu'on mette dans la bombe un poids ϖ de poudre supérieur à $\frac{c'}{\eta}$; puisque la densité

de la poudre actuelle est voisine de 1,5 le poids ϖ_m qui pourrait se loger dans le volume c' serait donc $\varpi_m = 1,5\ c$ tandis que le poids qui rendrait infinie la pression P′ serait $\varpi = c'$, si $\eta = 1$.

Par suite, la formule de Noble et Abel ne peut se prêter à la représentation des phénomènes de la combustion qu'à condition de faire varier η qui aurait une tendance à croître pour les hautes pressions.

1° Il n'y aurait aucune difficulté d'interprétation et accord, au contraire, entre la théorie des gaz et l'expérience, si η pouvait être pris égal à l'inverse de la densité de la poudre, $\frac{1}{1,5}$ ou $\frac{2}{3}$; à première vue, la chose paraît inadmissible. Cependant, observant de plus près les phénomènes de la combustion, il y a lieu de remarquer : 1° que la densité de la poudre n'est pas constante, mais subit l'influence de la température, qui est, dans la bombe, très élevée, plus de 2000°[1]. Nous avons fait quelques essais jusqu'à 100° seulement pour mesurer la dilatation linéaire des brins de poudre : or, cette dilatation est considérable, plus grande que celle du zinc, qui a un coefficient de dilatation supérieur à celui des autres métaux.

La dilatation de la Poudre B de 0 à 100° pour 1° est de 0,00004.

Donc, la dilatation cubique serait de 0,00012 environ; si on admet qu'elle croît avec la température, comme c'est la règle générale pour tous les corps et devienne triple, par exemple, pour une température moyenne

[1] On admet, en général, 3000° pour la température de combustion des poudres à la nitro-cellulose (type des poudres B françaises) et 4000° pour la température de combustion des Poudres du type *balistites* ou *cordites* (mélange de nitrocellulose et de nitroglycérine).

de 1 000°, on aurait, pour densité de la poudre à cette température

$$\delta_t = \frac{\delta_0}{1 + \alpha t} = \frac{1,5}{1 + 0,00036 \times 1\,000} = \frac{1,5}{1,4}$$

et l'inverse de δ_t serait bien voisin de l'unité, c'est-à-dire du nombre η, covolume trouvé expérimentalement.

2° D'ailleurs, considérons le brin de poudre en pleine combustion ; il existe, entre la partie interne encore solide du brin et les gaz permanents déjà formés, une zone de passage où la densité varie de celle de la poudre 1,5 à celle des gaz qui, à la fin de la combustion, est égale à Δ. On doit donc considérer la densité *réelle* de la poudre en combustion, non comme égale à la densité δ de la poudre solide, mais comme égale à une valeur beaucoup plus petite.

Fig. 6.

3° Il résulte de cette manière d'imaginer les phénomènes que l'objection relative à la valeur limite ∞ de la pression pour $\Delta = \frac{1}{\eta}$ disparaît. On ne peut introduire dans la bombe plus d'une quantité $\Delta = \frac{1}{\eta}$ de poudre en *combustion* ; si on en introduit un poids plus fort à l'état solide, ou bien la matière est trop compacte pour que le feu s'y propage ; ou bien la rupture de la bombe se produit par la dilatation même de la poudre solide au moment du passage en gaz de sa première couche.

Tel est le raisonnement qui nous paraît capable de concilier la théorie des gaz parfaits avec les résultats expérimentaux et les nombres qui entrent dans la formule de Noble et Abel pour les poudres sans fumée.

11. **Généralisation de la loi de Noble et Abel.** — La loi que traduit la formule

$$P' = f \frac{\Delta}{1 - \eta\Delta}$$

ne s'applique qu'à la pression maximum P'; mais pour l'étude de la Balistique Intérieure, il est nécessaire de connaître la valeur de la pression P pendant tout le cours de la combustion, c'est-à-dire lorsqu'il y a une fraction z de la charge brûlée.

Si on applique, au moment où la fraction z se trouve brûlée, la loi de Noble et Abel, c'est-à-dire celle de Mariotte, on dira qu'il y a un poids ϖz converti en gaz, un poids $\varpi(1 - z)$ encore solide; celui-ci dont la densité est δ vient en déduction du volume c' de la bombe; on aura donc

$$P = f \frac{\varpi z}{c' - \varpi(1 - z)\frac{1}{\delta} - \eta\varpi z} = f \frac{\varpi z}{c' - \eta\varpi + (1 - z)\varpi(\eta - \frac{1}{\delta})}$$

Au dénominateur, le terme $(1 - z)\varpi(\eta - \frac{1}{\delta})$ disparaîtra si $z = 1$, fin de la combustion de la poudre, ou si $\eta = \frac{1}{\delta}$.

Nous avons montré que, physiquement, cette dernière hypothèse pouvait parfaitement s'expliquer et même qu'elle permettait de donner à la loi de Noble et Abel son interprétation correcte.

On a alors le choix entre cette explication physique, ou bien le procédé employé par tous les auteurs qui ont écrit sur la Balistique Intérieure, de remplacer le terme

variable du dénominateur par une valeur moyenne, ou bien encore l'adoption de la formule simple

$$P = f \frac{\varpi z}{c' - \eta \varpi}$$

comme une formule èmpirique qui n'a plus de relation avec la théorie des gaz et qui est la généralisation directe de la formule de Noble et Abel.

Quelle que soit la façon, ou logique ou empirique, de concevoir la généralisation de la loi de Noble et Abel, elle s'exprimera, pendant toute la combustion, par la formule

$$P = f \frac{\Delta}{1 - \eta \Delta} z$$

avec

$$\Delta = \frac{\varpi}{c'}$$

ou bien encore sous la forme

$$P = P'z.$$

Pour certaines questions du développement des pressions à l'origine des temps, il faut cependant remarquer que, pour $z = 0$, on n'a pas $P = 0$, mais $P = \pi_0$, π_0 étant la *pression atmosphérique*; il faut donc, pour ces cas spéciaux, écrire

$$P' = \pi_0 + f \frac{\Delta}{1 - \eta \Delta}$$

et par suite

$$P = \pi_0 + (P' - \pi_0) z.$$

§ 2. — La fonction de forme

12. **Attaque des solides.** — Lorsqu'un corps solide est plongé dans un milieu ou liquide ou gazeux qui a sur lui une action de décomposition, l'attaque du solide paraît se faire, dans tous les cas, avec une vitesse qui est la même sur toutes les normales à la surface plongée dans le milieu.

Ainsi les angles et arêtes vives se conservent : un cube reste un cube et un parallélipipède de dimensions l, m, n, a, au bout d'un temps t, ses arêtes amenées aux dimensions $l - 2wt$, $m - 2wt$, $n - 2wt$, si w est la vitesse linéaire de décomposition; la vitesse w restera une constante si la composition du milieu reste la même.

On peut faire les expériences avec les substances les plus variées, par exemple le cuivre ou l'argent dissous dans l'acide azotique, le savon dans l'eau, etc. [1].

Tout au plus, peut-on reconnaître que, lorsque le solide est réduit à des dimensions extrêmement faibles, à l'état de grenaille de quelques dixièmes de millimètre de côté, il se produit une assez notable accélération de la vitesse de l'attaque. Mais, pour toutes les masses de dimensions un peu fortes, l'attaque dite par *couches ou tranches parallèles*, reste la règle générale ; la conservation des arêtes est le phénomène caractéristique de ces décompositions ou dissolutions.

Mais, il est bien entendu et bien évident que cette loi très simple s'applique *exclusivement* à des solides supposés isolés dans le dissolvant, ne reposant pas sur le fond du vase, mais constamment agités en tous sens de manière à

[1] Ch. 2. p. 589.

ce que le mode d'attaque soit régulier et entièrement uni forme, quelle que soit l'orientation du solide.

Si on n'observe pas ces précautions expérimentales essentielles, le phénomène change totalement de caractère ; l'attaque dépend alors de la position du solide relativement aux parois du vase, de son rapprochement d'autres solides de même espèce, de la présence de parties protégées par d'autres, du degré d'activité de l'agitation, de la formation de courants dans le liquide, etc. De très simple dans sa forme élémentaire, le phénomène devient extrêmement compliqué et la loi à laquelle, dans un cas donné, il obéit, doit être demandée à des expériences spéciales, et ne peut plus être formulée, à priori, en partant de la loi élémentaire reconnue et de la forme géométrique qu'affecte le corps.

13. **Les brins de poudre brûlent par tranches parallèles.** — Les poudres colloïdales modernes brûlent en présentant les mêmes phénomènes que ceux qu'on vient d'analyser, c'est-à-dire d'une simplicité extrême pour le brin ou le grain unique, mais d'une complication bien plus grande si on étudie le mode de combustion d'une charge tout entière, composée d'un très grand nombre de brins.

On met facilement en évidence le phénomène de la combustion d'un brin isolé de poudre par tranches parallèles en tirant, par exemple, mélangé avec une poudre très vive, un parallélipipède de poudre très épaisse qui s'enflammera avec la poudre vive, mais sera projeté hors de la bouche à feu et s'éteindra dans l'air : on le retrouve avec ses arêtes vives, et on peut en mesurer les dimensions restantes, qui satisfont sensiblement à la loi de combustion par tranches parallèles.

Pour une charge de poudre épaisse, tirée dans un canon de petit calibre, de très nombreux brins sont ainsi projetés et retrouvés avec la forme et les arêtes intactes. Des tubes de poudre restent des tubes, brûlés par l'intérieur et par l'extérieur sur une même épaisseur.

Si on admet comme générale et applicable à toute la charge cette loi reconnue comme loi élémentaire de la combustion d'un brin de poudre, rien n'est plus facile que de calculer la *fraction z de poudre brûlée*, qu'il faut mettre dans la formule de Noble et Abel :

$$P = P'z.$$

Poudre en bandes. — Ainsi, soit un parallélipipède de poudre dont les arêtes sont l, m, n ; la charge étant supposée composée de brins égaux entre eux, la fraction z est le rapport du volume brûlé du grain, c'est-à-dire :

$$lmn - (l - 2e)(m - 2e)(n - 2e)$$

pour une épaisseur brulée e, au volume primitif lmn ;

On a donc :

$$z = 2e\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{l} - 2e\left(\frac{1}{mn} + \frac{1}{nl} + \frac{1}{ml}\right) + \frac{4e^2}{mnl}\right]$$

ou

$$z = ae\,[1 - \lambda e + \mu e^2]$$

a, λ et μ étant des constantes.

Jusqu'à présent, tous les écrits sur la Balistique Intérieure admettaient la loi simple ci-dessus de la combustion par tranches parallèles et les formules qui en résultent pour le poids z de poudre brûlée.

Pour les poudres de forme usuelle, *sphérique*, *cubique*, *parallélipipédique*, *cylindrique*, *tubulaire*, *prismatique*, etc., on peut mettre z sous la forme d'un polynôme de 3e degré en z, c'est-à-dire poser :

$$z = ae + be^2 + ce^3.$$

On trouvera dans plusieurs traités de Balistique Intérieure[1] les valeurs des coefficients, a, b et c, suivant la forme géométrique du grain.

Mais la généralisation, au cas d'une charge de poudre, de la loi élémentaire trouvée pour la combustion d'un brin ne résiste ni à l'examen critique qu'on peut en faire, ni aux vérifications expérimentales qu'on peut imaginer.

14. **Combustion réelle des brins de poudre.** — Quand on examine les résidus d'une poudre épaisse lancés hors d'un canon de petit calibre et qui sortent non entièrement comburés, on peut, certes, en retrouver un grand nombre avec leurs angles vifs et leur surface régulièrement attaquée par la flamme. Si on considère ces brins, on peut, comme nous l'avons dit, justifier très approximativement la théorie de la combustion par tranches parallèles en tant qu'elle s'applique à un brin isolé.

Mais, par contre, une partie des brins est irrégulièrement comburée ; les épaisseurs ne sont pas restées uniformes ; des trous souvent alignés dans le sens du laminage tendent à percer la poudre, à la creuser de cavités qui vont s'agrandissant, se rejoignent et découpent la poudre en lamelles, ayant la forme de fer de lance qui jonchent le sol en avant du canon.

Aussi, n'est-il point étonnant que faisant abstraction

[1] Mata, 2. p. 63.

des brins de poudre retrouvés entiers et qu'une cause accidentelle aurait fait échapper à la combustion, et considérant la fragmentation en un grand nombre de lamelles, le général Moisson [1] ait pu penser que les poudres colloïdales en bandes brûlaient en restant sensiblement *semblables* à elles-mêmes.

Ce n'était là, évidemment, qu'une représentation analytique d'un phénomène très irrégulier ; mais on se rend bien compte cependant que cette hypothèse avait sa base dans une vision nette d'un phénomène réel et on comprend pourquoi les formules du général Moisson basées sur une hypothèse qui, a priori, paraît si contraire aux idées classiques sur le mode de combustion des poudres, ont pu subir, avec assez de succès, le contrôle de l'expérience quand on les applique aux poudres actuelles.

Il est bien évident qu'une partie de ces irrégularités dans la combustion et la fragmentation peut tenir à une fabrication des poudres imparfaite ou à des nécessités pratiques rencontrées par les poudreries. Mais l'artilleur, qui utilise la poudre dans ses canons et cherche à établir la théorie de son moteur, ne doit raisonner que sur des êtres réels et non sur des poudres parfaites, régulières de forme et homogènes dans leur combustion — qu'il souhaite ardemment rencontrer — et qui, dans ses formules, entreront d'ailleurs aisément, comme cas particuliers des poudres en service courant.

15. **Charges en fagot.** — Mais, faisons abstraction des irrégularités de fabrication signalées ci-dessus, et considérons seulement des brins de forme parfaite et d'une

[1] Moisson. **2**. p. 69

combustion rigoureusement par tranches parallèles. Peut-on admettre que les lois élémentaires, déterminées pour un seul brin, pourront, sans modification, s'appliquer à un fagot tout entier tel qu'il est constitué dans la chambre d'un canon et à la charge entière composée de plusieurs fagots bout à bout ?.

Il est bien certain que non et, en plus des raisons générales données à propos de la décomposition d'un solide quelconque (12) et qui subsistent entièrement ici, il est très facile d'analyser, pour les poudres, les principales causes modificatrices de la loi élémentaire.

1° *Inflammation et combustion.* — Les traités de Balistique Intérieure, pour appliquer à la charge totale la loi élémentaire de combustion du brin, admettent que *l'inflammation* de toute la charge est instantanée, c'est-à-dire que la vitesse de propagation de la flamme est infiniment grande par rapport à la vitesse *de combustion* qui attaque la poudre par tranches parallèles. Rien n'est moins sûr que cette affirmation ; en tous cas elle ne se vérifie pas à l'air libre où un brin de poudre allumé par une extrémité, brûle à la façon d'une allumette. Pour des pressions plus élevées où les deux vitesses *d'inflammation* et de *combustion* deviennent plus considérables, rien n'autorise à affirmer que la première cesse d'avoir avec la seconde un rapport fini.

Il semble plus naturel de penser que le premier fagot en contact avec la charge d'amorçage s'enflamme et brûle avec une certaine avance sur le dernier qui est en contact avec le culot du projectile.

2° *Propagation de l'inflammation.* — L'inflammation se propage superficiellement par les canaux laissés entre les brins de poudre ; or, elle est assurée d'une manière

très variable, à tel point que si on n'aligne pas soigneusement les brins suivant l'axe de la chambre à poudre, on a à craindre la production de surpressions qui sont, presque à coup sûr, réalisées avec la poudre mise en vrac.

3° *Propagation transversale.* — Si on aligne la poudre dans le sens de l'axe, la propagation transversale du feu se fait par un tout autre mécanisme que la propagation longitudinale, car les canaux ne sont plus alignés dans cette direction.

4° *Contacts des brins de poudre.* — Les contacts multiples des brins de poudre entre eux ou avec les parois de l'arme créent des régions privilégiées, où, à cause de ce contact même, la combustion ne suit plus exactement les mêmes lois élémentaires. Ainsi, un brin de poudre tubulaire placé entre ses voisins, tendra à l'extérieur, à prendre une forme hexagonale, etc, etc.

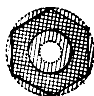


Fig 7.

16. **Idée de la fonction de forme.** — Que conclure de l'analyse sommaire qui vient d'être faite des phénomènes de la combustion d'un fagot de poudre et de la complexité qu'ils présentent ?

Tout d'abord, on peut dire qu'une loi de combustion d'origine purement géométrique, qu'on déduira aisément de la forme d'un grain ou d'un brin de poudre, ne permettra aucunement de caractériser le mode de combustion d'une charge de poudre. Cette hypothèse géométrique qui est à la base de toutes les théories balistiques actuelles et qui, entre autres particularités, suppose l'inflammation instantanée et l'indépendance des brins, ne doit pas être conservée dans une étude générale et rationnelle des poudres.

Il est bien plus exact et bien plus conforme aux prin-

cipes de la méthode expérimentale de ne point considérer comme connue *a priori*, par une voie géométrique, une fonction dont nous avons montré l'extrême complexité.

Il faut, à cette *qualité* qui différencie le mode de combustion d'une charge, suivant la disposition des fagots, la forme et les dimensions des brins de poudre, suivant aussi la perfection de la fabrication, et le mode d'inflammation, etc., pouvoir faire correspondre des *quantités* algébriques qui soient les caractéristiques spécifiques de l'espèce de poudre considérée relativement à ses propriétés non pas *géométriques*, mais *balistiques*.

Ces *quantités* devront pouvoir, dans chaque cas particulier, être demandées à l'expérience et si on sait instituer des essais spéciaux susceptibles de les déterminer avec précision, elles deviennent de véritables *caractéristiques* de la poudre, définissant l'*espèce* de même que la *force* f et le *covolume* η en définissent le *genre*.

Mais, pour le choix de la fonction qui permettra de déterminer les quantités caractéristiques, peut-on poser quelques règles en vue de servir de guide parmi l'infinité des formes analytiques possibles qu'on peut essayer ou imaginer? La fonction choisie doit être telle que, quand on se placera aux cas-limites, qu'on peut supposer réalisables pratiquement, où la forme géométrique du grain seule déterminera la fonction, c'est-à-dire dans le cas où on supposera la régularité absolue de la poudre, la fabrication parfaite et l'inflammation instantanée, on trouve la fonction qu'indique la géométrie. C'est donc la généralisation — en laissant arbitraire une certaine quantité — de formules s'appliquant aux corps géométriques simples de la forme ordinaire des brins de poudre, qui doit servir de point de départ pour le choix de la *fonction de forme*.

Ces principes généraux conduisent à examiner tout d'abord quelques cas particuliers où on trouvera l'indication d'une *fonction de forme* qui puisse être généralisée.

17. **Les trois types de poudres à combustion dégressive.** — Examinons les formules par lesquelles on peut exprimer la combustion de trois types de poudres qui sont :

1° La *sphère* ou le *cube*, brûlant par tranches parallèles de l'extérieur vers l'intérieur ;

2° Le *cylindre* plein, brûlant de l'extérieur vers l'intérieur ;

3° La *bande* ou la *plaque* indéfinie.

On les dit *dégressives* parce que leur pouvoir émissif des gaz va en décroissant au fur et à mesure de la combustion.

1° *Sphère.* — Soient R le rayon initial et r le rayon actuel de la sphère de poudre.

Le poids q de poudre brûlé actuellement est :

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\delta$$

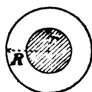


Fig. 8.

δ étant la densité de la poudre.

Le poids primitif Q était :

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \delta.$$

On a donc, pour la *fraction brûlée* z, à l'instant actuel, le rapport

$$z = \frac{q}{Q} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

D'autre part, la surface de combustion actuelle S a pour valeur

$$S = 4\pi r^2$$

et la surface primitive était $S_0 = 4\pi R^2$.

On a donc

$$S = S_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

et, par suite, la surface S s'exprimera en fonction de S_0 par la formule suivante, avec la variable z

$$S = S_0 (1 - z)^{\frac{2}{3}}$$

Généralisation. — Cette formule, qui s'applique à la sphère et au cube, présente, en outre, un caractère beaucoup plus général : elle représenterait la loi de combustion d'une charge dont les éléments (grains ou brins) resteraient constamment semblables à eux-mêmes.

En effet, le rapport des surfaces homologues initiale et à l'instant t est celui des carrés des dimensions linéaires homologues, et les volumes sont dans le rapport des cubes ; le volume restant étant $(1 - z)$ au temps t, le rapport des dimensions linéaires sera $(1 - z)^{\frac{1}{3}}$ et, par suite, celui des surfaces homologues restante S et initiale S_0 sera $(1 - z)^{\frac{2}{3}}$.

2°. *Cylindre plein (cordite).* — La longueur h du cylindre étant très grande, par hypothèse, relativement au diamètre, on négligera l'influence de sa diminution sur la variation de volume.

R étant le rayon initial et r le rayon actuel, on a :

$$q = \pi (R^2 - r^2) h$$

et comme $Q = 2\pi R^2 h$, il vient :

$$z = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

D'autre part, la surface de combustion actuelle est

$$S = 2\pi rh = S_0 \frac{r}{R}$$

S_0 étant la surface initiale.

On a donc, en fonction de z :

$$S = S_0 (1 - z)^{\frac{1}{2}}$$

3°. *Bande indéfinie.* — La surface S reste constante (l'influence des bords étant supposée négligeable). On peut donc écrire :

$$S = S_0 (1 - z)^0.$$

18. **La fonction de forme des poudres dégressives.**— Ainsi, trois types de poudre à *combustion dégressive*, c'est-à-dire dont la quantité de gaz émise dans un temps dt (à pression constante) diminue au fur et à mesure de la combustion, étant représentés, au point de vue de leur faculté d'émission des gaz, par la grandeur de leur surface enflammée actuelle S, celle-ci peut s'exprimer, en fonction de la surface initiale S_0 et de la fraction actuellement brûlée z, par une formule d'un même type

$$S = S_0 (1 - z)^{\beta}$$

où β prend les valeurs :

$\beta = \frac{2}{3}$ pour la *sphère*, le *cube*, les *poudres à combustion semblable* ;

$\beta = \frac{1}{2}$ pour le *cylindre* ;

$\beta = 0$ pour la *bande indéfinie*.

On pourrait, d'ailleurs, imaginer d'autres cas s'expri-

mant par un exposant $\beta > \frac{2}{3}$, en supposant, par exemple, une densité de la poudre variant avec l'épaisseur brûlée, ou un certain nombre de sphères non simultanément enflammées, etc. etc.

Ainsi, l'expression précédente apparaît comme susceptible d'être généralisée et de pouvoir représenter le mode de combustion d'une poudre quelconque *dégressive*, à condition de laisser arbitraires et sans signification géométrique précise l'*exposant* β et la *surface initiale* S_0. Les deux quantités β et S_0 seront demandées à l'expérience.

La faculté d'émission de gaz ou plutôt de pressions que possède une poudre donnée dans les conditions du tir est ainsi caractérisée par son assimilation à une certaine poudre de forme non précisée et par le choix d'un exposant β. A mesure que celui-ci augmente, la faculté d'émission diminue; il peut donc lui servir de mesure.

Appelons $\varphi(z)$ la *fonction de forme*; on aura ici:

$$\varphi(z) = (1 - z)^\beta$$

La surface actuellement en combustion, dans cette poudre fictive, dont la forme géométrique est définie par les quantités β et S_0, a pour expression

$$S = S_0 \varphi(z).$$

Soit q le poids de poudre brûlée à l'instant actuel, w la vitesse linéaire de propagation de la combustion à l'intérieur du grain ou du brin de poudre qui est ainsi substitué à toute la charge; l'épaisseur brûlée, dans le temps dt, sera wdt et, par suite, le poids dq aura pour expression (δ étant la densité de la poudre)

$$dq = S\delta w dt.$$

Si on opère à *pression constante*, w sera une constante et on aura

$$\frac{dq}{dt} = S_0 w \delta \varphi(z)$$

Mais $z = \frac{q}{Q}$ d'où $\frac{dq}{dt} = Q \frac{dz}{dt}$

et par suite

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S_0 w \delta}{Q} \varphi(z)$$

ou bien

$$\frac{dz}{dt} = A \varphi(z)$$

en posant

$$A = \frac{S_0 w \delta}{Q}.$$

Le nombre A dépend ainsi du rapport $\frac{S_0 \delta}{Q}$, c'est-à-dire, en faisant disparaître la densité δ qui entre dans Q, du rapport de la surface fictive primitivement enflammée, au volume de la poudre.

Au point de vue géométrique, ce serait la caractéristique de la plus ou moins grande fragmentation de la poudre, car A est inversement proportionnel, pour des poudres de forme semblable, à une dimension linéaire du brin.

Au point de vue balistique, ce nombre A, considéré comme indépendant de son expression géométrique, caractérisera la *vivacité* expérimentale de la poudre.

19. **Les poudres progressives.** — Les poudres *progressives* sont celles dont la surface S, en combustion, croît avec le temps.

Pour déterminer la fonction de forme qui conviendra aux poudres de cette espèce, nous examinerons les cas, en quelque sorte inverses de ceux précédemment considérés pour les poudres *dégressives*, c'est-à-dire :

1° la *sphère* ou le *cube* brûlant par tranches parallèles de l'intérieur vers l'extérieur ;

2° le *cylindre* plein brûlant de l'intérieur vers l'extérieur ;

3° la *bande* ou la *plaque indéfinie*.

1. *Sphère.* — Soient R le rayon extérieur qui reste une constante et r le rayon intérieur, qui varie de o à R.

Le poids de la poudre brûlée q est, actuellement, proportionnel à $\frac{4}{3}\pi r^3$ et, comme le poids total est $Q = \frac{4}{3}\pi R^3$ on aura :

$$z = \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

La surface actuelle $S = 4\pi r^2$. Puisque la surface initiale $S_0 = 4\pi R^2$, on aura

$$S = S_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Il viendra donc

$$S = S_0 z^{\frac{2}{3}}.$$

Cette formule est vraie également pour la combustion progressive d'une poudre de forme quelconque qui resterait semblable à elle même pendant la combustion.

2. *Cylindre creux.* — Supposons le trou initial extrêmement petit ; on aura, à l'heure actuelle :

$$q = \pi r^2 h$$

et à l'origine :

$$Q = \pi R^3 h.$$

Donc : $$z = \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Mais : $$S = S_0 \frac{r}{R}$$

d'où :

$$S = S_0 z^{\frac{1}{2}}.$$

3. *Bande indéfinie.* — Dans ce cas, la surface S reste constamment égale à S_0. On peut donc écrire :

$$S = S_0 z^0.$$

4. *Remarque.* — En réalité, les formules des poudres progressives se ramènent à celles des poudres dégressives, la seule différence étant dans la signification de z qui est complémentaire [z se changeant en $(1 - z)$] de l'une à l'autre poudre.

20. **Fonction de forme des poudres progressives.** — Le raisonnement de généralisation fait à propos des poudres dégressives pourra se répéter ici et la *fonction de forme* $\varphi(z)$ des poudres progressives sera prise égale à :

$$\varphi(z) = z^{\beta'}$$

l'exposant β' devant être demandé à l'expérience.

D'ailleurs, la formule différentielle de la combustion de la poudre à pression constante

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S_0 w \delta}{Q} \varphi(z)$$

sera également valable avec la même définition de la *vivacité* qui est telle que :

$$A = \frac{S_0 w \delta}{Q}$$

et la même signification géométrique ou expérimentale.

21. **Remarque sur les fonctions de forme.** — On peut imaginer, d'ailleurs, d'autres fonctions de forme représentant tel ou tel mode de combustion qu'on voudra. Le principe de la méthode exposée ci-dessus consiste, essentiellement, à exprimer la combustion en fonction de la variable z.

Ne prenant donc dans le calcul géométrique des vitesses de combustion de brins de poudre de forme simple que leur expression algébrique et la généralisant, nous avons pu remplacer, dans les hypothèses fondamentales de la Balistique Intérieure, une spécification trop étroite et trop rigide par un symbole bien plus général qui emprunte à l'expérience la valeur numérique de l'*exposant de forme* (β et β') et de la *vivacité* A de la poudre. Mais, l'adoption de cette loi simple avec les deux caractéristiques A et β d'une poudre a été spécialement faite en vue de l'étude de la Pyrostatique et de la détermination des lois expérimentales élémentaires de la combustion des poudres, avec les poudres de forme usuelle. Ces lois une fois déterminées, on pourra adopter, dans tel ou tel cas particulier, la fonction de forme qu'on voudra et c'est cette généralité de la solution qu'exprimera la fonction $\varphi(z)$ laissée sous forme symbolique dans tout le développement de la Pyrodynamique.

22. **Sur d'autres fonctions de forme.** 1° *Fonction de forme d'une poudre mince.* — Cherchons, par exemple, la fonction $\varphi(z)$ que la géométrie conduirait à admettre pour une poudre plate en bandes ou lamelles de surface initiale S_0 et d'épaisseur totale e très petite par rapport aux dimensions de la surface S_0.

La surface actuelle est, en négligeant des termes en ε^2 et εe :

$$S = 2\left[lm + me + el - 4\varepsilon(l + m)\right]$$

d'où

$$\frac{S}{S_0} = 1 - 4\varepsilon \frac{l+m}{lm}.$$

D'autre part, avec la même approximation, on a :

$$z = \frac{2\varepsilon}{e}.$$

On trouve ainsi :

$$\frac{S}{S_0} = 1 - 2\frac{e(l+m)}{ml} z.$$

On aura donc :

$$\varphi(z) = 1 - kz$$

pour fonction de forme, dans ce cas particulier, et k sera un très petit coefficient si l'épaisseur de la poudre e est petite relativement à l et à m, autres dimensions du brin.

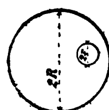


Fig. 9.

2° *Fonction de forme d'une poudre tubulaire.* — Abstraction faite de l'influence des extrémités, la surface initiale d'une poudre tubulaire percée de n trous est :

$$S_0 = 2\pi h(R + nr)$$

et la surface en ignition S, lorsqu'une épaisseur ε est brûlée, a pour expression :

$$S = 2\pi h\left[R - \varepsilon + n(r+\varepsilon)\right] = S_0 + 2\pi h(n-1)\varepsilon.$$

Mais :

$$z = n\left(\frac{r+\varepsilon}{R}\right)^2 + 1 - \left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)^2 = \frac{nr^2}{R^2} + \frac{2\varepsilon}{R}\left(\frac{nr}{R}+1\right) + (n-1)\frac{\varepsilon^2}{R^2}$$

ou, pour des épaisseurs petites :

$$z = \frac{nr^2}{R^2} + 2\frac{\varepsilon}{R}\left(\frac{nr}{R}+1\right).$$

On a donc :

$$\frac{S}{S_0} = 1 + \left(\frac{R}{R + nr}\right)^2 \frac{n-1}{2}\left(z - \frac{nr^2}{R^2}\right).$$

Si $n = 1$, la poudre est à *combustion constante* ; on a toujours $S = S_0$, quel que soit le diamètre du trou intérieur.

Si $n > 1$, on a une poudre *progressive* dont la *fonction de forme* a pour expression :

$$\varphi(z) = az - b,$$

a et b étant deux constantes dépendant des dimensions de la poudre.

CHAPITRE II

THÉORIE DE LA COMBUSTION DES POUDRES EN VASE CLOS

§ I. — La combustion a volume constant

23. **Influence de la pression.** — Après avoir discuté le mode de combustion de la poudre, à *pression constante*, et l'avoir représenté (18) par une formule telle que :

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z),$$

il s'agit maintenant d'établir les lois de la combustion lorsque la pression est variable ; tout d'abord, on se placera dans le cas simple où la pression varie, en fonction de z, suivant une loi connue (11), c'est-à-dire en vase clos. C'est donc l'étude de la combustion à *volume constant* qu'il s'agit d'entreprendre.

La vitesse de combustion $\frac{dz}{dt}$ de la poudre croît avec la pression. Dans le vide, la poudre ne brûle pas et si on fait passer un courant électrique dans un fil mis au contact de la poudre et porté au rouge, la propagation de la flamme ne se fait pas et un simple sillon se creuse dans la lamelle.

Plusieurs expérimentateurs, depuis Piobert et de Saint-Robert jusqu'à M. Vieille, se sont proposé la détermination de la fonction de P qui représente la variation de $\frac{dz}{dt}$.

Avec les poudres françaises, les recherches de M. Vieille [1], ou celles, postérieures, que nous avons effectuées au LCM [2], sont les seules qui aient porté sur des pressions de l'ordre de celles qu'on rencontre dans les armes à feu.

Il est bien certain que l'expérience ne peut prétendre donner, dans l'état actuel de la Balistique Intérieure expérimentale, avec toutes les hypothèses qu'elle suppose et les difficultés de mesure qu'elle rencontre, que l'allure générale du phénomène. On opère alors, dans cette question, comme dans une foule de problèmes naturels analogues (comme on a fait, en particulier, pour choisir une *fonction de forme*) en adoptant une formule monôme P^α comme représentation analytique de la relation inconnue. L'exposant α sera alors demandé à l'expérience. Sa connaissance achèvera de déterminer toutes les lois physiques nécessaires à la Pyrostatique pour traiter complètement le problème de la combustion de la poudre en vase clos.

24. Equation différentielle de la combustion en vase clos. — Soient q le poids de poudre brûlée à l'instant t, et Q le poids initial de la charge. La vitesse de combustion (en poids) est $\frac{dq}{dt}$, qui est proportionnel à la surface actuelle S de combustion. Mais, d'après ce qui a été dit dans le § précédent (18), on peut mettre S sous la forme $S_0\varphi(z)$, S_0 étant la surface initiale.

On a donc, à *pression constante* :

$$\frac{dq}{dt} = S_0\delta w\varphi(z).$$

[1] VIEILLE. 3.
[2] CH. 3.

δ étant la densité de la poudre, w la vitesse linéaire de combustion sous la pression unité.

A *volume constant*, sous l'influence de la pression variable P, on aura :

$$\frac{dq}{dt} = S_0 \delta w \varphi(z) P^\alpha ;$$

mais, par définition :

$$z = \frac{q}{Q} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dq}{dt} = Q\frac{dz}{dt}$$

On aura donc :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S_0 \delta}{Q} w \varphi(z) P^\alpha$$

ou encore :

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z)P^\alpha$$

en posant :

$$A = \frac{S_0 \delta w}{Q}.$$

Le nombre A est, par définition (18), la *vivacité* de la poudre.

25. **La combustion de la poudre à l'air libre.**
1. *Formule générale.* — L'équation différentielle de la combustion de la poudre à *pression constante*, par exemple à la pression atmosphérique π_0, est, d'après la formule établie ci-dessus :

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z)\pi_0^\alpha,$$

et on aura le temps t écoulé lorsqu'une fraction z de la poudre sera brûlée, par la formule :

$$A\pi_0^\alpha t = \mathbf{M}(z),$$

M étant une fonction de la fraction z définie par l'équation :

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

On suppose qu'une table de cette intégrale a été calculée pour la fonction de forme $\varphi(z)$ que l'on admet.

La *durée totale de la combustion* à l'air libre sera désignée par τ et on aura :

$$A\pi_0^\alpha \tau = \mathbf{M}(1).$$

2. *Poudres dégressives.* — Soit :

$$\varphi(z) = (1 - z)^\beta.$$

On aura :

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{dz}{(1 - z)^\beta} = \frac{1}{1 - \beta}\left[1 - (1 - z)^{1-\beta}\right].$$

de sorte que la durée totale de combustion τ_β à l'air libre d'une poudre, dont l'exposant de forme est β, est donnée, en faisant $z = 1$, par la formule :

$$A\pi_0^\alpha \tau_\beta = \frac{1}{1 - \beta}.$$

Cette durée est infinie pour $\beta = 1$.

Lorsqu'on spécifie la valeur de β, on trouve pour $M(z)$ les fonctions suivantes :

β	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	...	1
$M(z)$	z	$2\left[1-(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]$	$3\left[1-(1-z)^{\frac{2}{3}}\right]$	...	$-\text{Log}\,(1-z)$
$M(1)$	1	2	3	...	∞

3. *Poudres progressives.* — Soit :

$$\varphi(z) = z^{\beta'}.$$

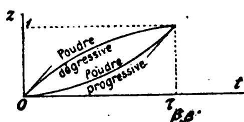


Fig. 10.

On aura :

$$M(z) = \int_0^z \frac{dz}{z^{\beta'}} = \frac{1}{1-\beta'}\, z^{1-\beta'}.$$

La durée totale de combustion $\tau_{\beta'}$ aura pour expression

$$A\pi_0^{\alpha}\tau_{\beta'} = \frac{1}{1-\beta'}$$

c'est-à-dire la même valeur que dans le cas des poudres dégressives, si $\beta = \beta'$.

Cela s'explique d'ailleurs aisément en se reportant à la signification des deux exposants β et β' et à leur relation (19,4°).

La figure ci-dessus représente les courbes (z, t) d'une poudre *progressive* et d'une poudre *dégressive* ayant $\beta = \beta'$, même *vivacité* A et brûlant à l'air libre.

4. *Poudres minces.* — Si on avait (22, 1°) :

$$\varphi(z) = 1 - kz,$$

avec k très petit, il viendrait :

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{dz}{1 - kz} = \int_0^z (1 + kz)dz = z + \frac{1}{2}kz^2.$$

La *durée totale* de la combustion est alors :

$$A\pi_0^\alpha\tau = 1 + \frac{1}{2}k.$$

5. *Poudres tubulaires à plusieurs trous.* — On a (22, 2°)

$$\varphi(z) = az - b.$$

Donc :

$$\mathbf{M}(z) = \frac{1}{b}\int_0^z \frac{dz}{\frac{a}{b}z - 1} = -\frac{1}{a}\,\text{Log}\left(1 - \frac{az}{b}\right).$$

La *durée totale* de la combustion est alors :

$$A\pi_0^\alpha\tau = -\frac{1}{a}\,\text{Log}\left(1 - \frac{a}{b}\right).$$

26. **La combustion des poudres dégressives en vase clos.** — Les poudres *dégressives* dont la fonction de forme est :

$$\varphi(z) = (1 - z)^\beta$$

auront donc (24) pour équation différentielle de combustion en vase clos :

$$\frac{dz}{dt} = A(1 - z)^{\beta} P^{\alpha}.$$

Nous nous proposons tout d'abord d'indiquer ici les moyens propres à déterminer, par expérience, les deux exposants β et α et le coefficient A.

Nous avons donné à ces lettres les dénominations suivantes :

β est dit l'*exposant de forme* ou simplement la *forme*,
α » l'*exposant de pression*,
A » *la vivacité*.

Pour l'établissement des formules qui nous seront utiles ici, il n'est pas nécessaire de faire l'intégration de l'équation différentielle : il suffit de la joindre à l'équation de Noble et Abel, de la pression en fonction de z, qui doit être prise sous la forme (11) :

$$P = \pi_0 + (P' - \pi_0)z,$$

π_0 étant la pression atmosphérique.

27. **Théorème I. Pression d'inflexion du tracé.** — Entre les deux relations :

$$\frac{dz}{dt} = A(1 - z)^{\beta} P^{\alpha} \qquad \text{et} \qquad P = \pi_0 + (P' - \pi_0)z$$

éliminons z ; on aura :

$$\frac{dP}{dt} = A(P' - \pi_0)^{1-\beta}(P' - P)^{\beta} P^{\alpha}.$$

On voit tout d'abord que si $\alpha > 0$, $\frac{dP}{dt}$ s'annule pour

$P = o$, et si $\beta > o$, $\frac{dP}{dt}$ s'annule pour $P = P'$, fin de la combustion.

Dans ce cas, la courbe (P, t) a ses deux tangentes extrêmes horizontales.

Il existe alors un *point d'inflexion* sur la courbe des pressions en fonction des temps.

Pour déterminer la *pression d'inflexion*, on formera $\frac{d^2P}{dt^2}$ qui s'écrira :

$$\frac{d^2P}{dt^2} = A\left(\frac{P' - \pi_0}{P' - P}\right)^{1-\beta} P^{\alpha - 1}\left[\alpha(P' - P) - \beta P\right]\frac{dP}{dt}.$$

Cette quantité devient nulle pour une valeur P_i de la pression, telle que :

$$P_i = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} P',$$

qui est située avant le maximum P', puisqu'on a supposé $\beta > o$.

A cette valeur P_i correspond un *maximum* de $\frac{dP}{dt}$ et la courbe présente une *inflexion* en ce point.

28. **Théorème II. Vitesse d'inflexion.** — Portons la valeur trouvée pour P_i dans l'expression de $\frac{dP}{dt}$; il viendra, en désignant la valeur maximum de $\frac{dP}{dt}$ par l'indice i :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_i = A\,(P' - \pi_0)^{1-\beta}\left(P' - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}P'\right)^{\beta} P'^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha}$$

qui, par réduction du second membre, devient :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_i = A\,(P' - \pi_0)^{1-\beta}\,P'^{\alpha+\beta}\,\frac{\alpha^\alpha\beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}.$$

Comme la pression maximum P′ est très grande relativement à la pression atmosphérique π_0, on pourra écrire simplement :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_i = A\,\frac{\alpha^\alpha\beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}\,P'^{1+\alpha}.$$

29. **Conséquences de ces deux théorèmes.** — Ces deux théorèmes permettent la détermination facile, d'après le tracé de la courbe (P, t) expérimentale, des trois caractéristiques des poudres β, α et A.

En effet, la relation $$P_i = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,P',$$
qui est indépendante de A, montre que, pour toutes les poudres, quelle que soit la densité de chargement employée, le *rapport de la pression d'inflexion P_i à la pression maximum P′ est une constante*, si α et β sont constants.

On a donc, dans chaque expérience en vase clos, une valeur du rapport $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Le second théorème montre que le rapport

$$\frac{\left(\frac{dP}{dt}\right)_i}{P'^{1+\alpha}} = A\,\frac{\alpha^\alpha\beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}$$

est une constante pour une poudre déterminée (A donné). Donc, il suffira de tirer cette poudre à des densités de

chargement variables et de chercher l'exposant α qui rend le premier membre une constante.

Ou encore, on pourra considérer deux tirs (1 et 2) à densités de chargement différentes et on aura, en éliminant le coefficient constant entre les deux, la formule :

$$\frac{\left(\frac{dP}{dt}\right)_{i1}}{\left(\frac{dP}{dt}\right)_{i2}} = \left(\frac{P'_1}{P'_2}\right)^{1+\alpha}$$

où l'exposant α est la seule inconnue.

Lorsque α aura ainsi été déterminé, le premier théorème, fera connaître β, puis un retour au second permettra de calculer la constante A.

Ainsi donc, les trois caractéristiques de la poudre : la *forme* β, l'*exposant de pression* α et la *vivacité* A pourront se déterminer par la seule considération du point d'inflexion de la courbe (P, *t*). C'est la région la plus nette de la courbe dont ni l'origine ni la fin ne peuvent être lus avec une grande précision.

§ 2. — Formules générales de la pyrostatique

30. **Equation de la combustion en vase clos.** — Nous nous proposons de donner maintenant les formules de la combustion en vase clos, c'est-à-dire l'expression de la pression P en fonction du temps *t*.

1. L'équation différentielle (27) des poudres *dégressives*.

$$\frac{dP}{dt} = A\,(P' - \pi_0)^{1-\beta}\,(P' - P)^{\beta}\,P^{\alpha}$$

en prenant pour variable le rapport $y = \frac{P}{P'}$ s'écrira :

$$\frac{dy}{dt} = AP'^{\alpha} (1 - y_0)^{1-\beta} (1 - y)^{\beta} y^{\alpha}.$$

On a posé $y_0 = \frac{\pi_0}{P'}$, π_0 étant la pression atmosphérique.

On aura donc, en intégrant :

$$AP'^{\alpha} t = \frac{1}{(1 - y_0)^{1-\beta}} \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y^{\alpha}(1 - y)^{\beta}}.$$

Dans le second membre, figure une intégrale que nous désignerons par $\mathfrak{L}(y)$, en posant :

$$\mathfrak{L}(y) = \int_0^y \frac{dy}{y^{\alpha}(1 - y)^{\beta}}.$$

On aura ainsi :

$$AP'^{\alpha} t = \frac{1}{(1 - y_0)^{1-\beta}} \left[\mathfrak{L}(y) - \mathfrak{L}(y_0)\right].$$

C'est la formule générale qui fera connaître le temps t écoulé depuis l'origine π_0 jusqu'à un point quelconque de la combustion. La fin de la combustion correspond à la valeur $y = 1$.

Il suffira donc de calculer, une fois pour toutes, une table de la fonction $\mathfrak{L}(y)$, pour pouvoir résoudre numériquement tous les problèmes de tir en vase clos.

On pourrait d'ailleurs calculer une table à double entrée de la fonction :

$$\frac{1}{(1 - y'_0)^{1-\beta}} \left[\mathfrak{L}(y) - \mathfrak{L}(y_0)\right]$$

qui permettrait la solution immédiate du problème.

3. On peut aussi écrire la formule, en remplaçant y_0 par sa valeur $\frac{\pi_0}{P'}$, de la façon suivante :

$$AP'^{\alpha+\beta+1}(P'-\pi_0)^{1-\beta}\, t = \mathfrak{L}(y) - \mathfrak{L}(y_0)$$

et lorsque la pression maximum P′ sera très grande par rapport à π_0, on aura :

$$AP'^{\alpha} t = \mathfrak{L}(y) - \mathfrak{L}(y_0).$$

Entre les deux variables $y = \frac{P}{P'}$ et z *fraction de poudre brûlée* lorsque la pression est égale à P, on a la relation

$$y = z + \frac{\pi_0}{P'}$$

qui pour P′ grand et pour z non voisin de zéro se réduit très sensiblement à $y = z$.

Pour une poudre qui admet une fonction de forme $\varphi(z)$ quelconque, on aura, excepté dans le voisinage immédiat de l'origine, la formule

$$AP'^{\alpha} t = \mathbf{L}_{\alpha}(z) - \mathbf{L}_{\alpha}(z_0)$$

en posant :

$$\mathbf{L}_{\alpha}(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^{\alpha}\varphi(z)}$$

avec : $$z = \frac{P}{P'}.$$

Elle est valable entre les deux valeurs P_1 et P′, si P_1 est notablement plus grand que π_0.

31. **L'origine de la courbe (P, t).** — Etudions maintenant la courbe (P, t) des poudres dégressives dans le voisinage de l'origine : le temps $t = 0$, est pris, comme on sait, pour une pression π_0 égale à la pression atmosphérique.

Dans l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y^\alpha(1-y)^\beta},$$

nous supposerons $y = \frac{P}{P'}$ très petit devant l'unité ; on développera $(1-y)^{-\beta}$ par la formule du binôme et on intégrera chaque terme en particulier ; il viendra :

$$\begin{aligned} AP'^{\alpha+\beta-1}(P'-\pi_0)^{1-\beta}t &= \frac{1}{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}-y_0^{1-\alpha}\right) \\ &+ \frac{\beta}{1}\frac{1}{2-\alpha}\left(y^{2-\alpha}-y_0^{2-\alpha}\right) \\ &+ \frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\frac{1}{3-\alpha}\left(y^{3-\alpha}-y_0^{3-\alpha}\right) \\ &+ \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3}\frac{1}{4-\alpha}\left(y^{4-\alpha}-y^{4-\alpha}\right)+\cdots \end{aligned}$$

Le premier terme de la série est ainsi :

$$AP'^{\alpha+\beta-1}(P'-\pi_0)^{1-\beta}t = \frac{1}{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}-y_0^{1-\alpha}\right)$$

d'où :

$$t = \frac{P^{1-\alpha}-\pi_0^{1-\alpha}}{(1-\alpha)AP'^\beta(P'-\pi_0)^{1-\beta}}+\cdots$$

En général, pour π_0 petit devant P', on pourra écrire :

$$t = \frac{P^{1-\alpha}-\pi_0^{1-\alpha}}{(1-\alpha)AP'}.$$

Si $\alpha < 1$, le temps de combustion (imaginaire au point de vue balistique) que mettrait la poudre pour passer d'une pression initiale nulle à la pression atmosphérique π_0 est fini. Donc, la courbe (P, t) coupe l'axe des t, en avant du point $t = 0$ à une distance finie égale à :

$$-\frac{1}{1-\alpha}\frac{\pi_0^{1-\alpha}}{AP'}.$$

D'ailleurs, en ce point d'origine on a : $\frac{dP}{dt} = 0$.

Si $\alpha > 1$, le temps considéré ci-dessus est *infini* ; la courbe (P, t) admet comme asymptote l'axe des t.

On peut remarquer que le fait que la poudre ne brûle pas dans le vide, c'est-à-dire admet, à partir de zéro, une durée de combustion infinie, pourrait être invoqué comme la preuve que l'exposant de pression α ne doit pas être inférieur à l'unité ; mais il ne paraît guère permis de tirer l'énoncé d'une loi *physique* de l'interprétation, à la limite, d'une formule *mathématique*.

32. **La fin de la courbe (P, t).** — Pour étudier la courbe des pressions en fonction du temps vers sa fin, c'est-à-dire lorsque P devient presque égal à P' et par conséquent lorsque y tend vers l'unité, on posera :

$$1 - y = u$$

et l'équation différentielle deviendra :

$$AP'^{\alpha+\beta-1}(P' - \pi_0)^{1-\beta}\, t = -\int_0^u \frac{du}{u^\beta(1-u)^\alpha}.$$

C'est exactement la même formule qu'à l'origine, au changement réciproque près des exposants α et β.

On a donc, la limite supérieure étant ici $y = 1$,

$$AP'^{\alpha+\beta-1}(P' - \pi_0)^{1-\beta} t$$

ou, en général :

$$AP'^{\alpha} t = \frac{1}{1-\beta}(1-y)^{1-\beta} + \frac{\alpha}{1}\frac{1}{2-\beta}(1-y)^{2-\beta}$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{1}{3-\beta}(1-y)^{3-\beta}$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}\frac{1}{4-\beta}(1-y)^{4-\beta} + \ldots$$

Si $\beta < 1$, le temps, pour passer d'une pression $P' - \varepsilon$ à la pression finale P' est *fini*.

Si $\beta > 1$, ce même temps est *infini* ; la courbe (P, t) a pour asymptote la parallèle P' à l'axe des temps.

33. **Ensemble des propriétés de la courbe (P, t), des poudres dégressives.** — Le tracé ci-contre indique la forme de la courbe des pressions en fonction du temps; les principales propriétés en sont résumées par les formules ci-dessous (π_0 négligeable devant P').

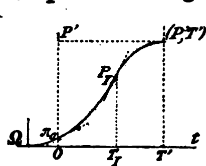


Fig. 11.

1. *L'équation de la courbe* est

$$AP'^{\alpha} t = \mathfrak{L}(y) - \mathfrak{L}(y_0)$$

avec la fonction

$$\mathfrak{L}(y) = \int_0^y \frac{dy}{y^{\alpha}(1-y)^{\beta}}$$

où la variable est $y = \frac{P}{P'}$.

2. La courbe part, pour $t = 0$, du point π_0 (pression atmosphérique) avec une *tangente :*

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_0 = AP'\pi_0^{\alpha}$$

et, en un point quelconque, la *tangente* a pour expression

$$\frac{dP}{dt} = AP'^{(1-\beta)}(P' - P)^{\beta}P^{\alpha}.$$

3. La courbe présente un *point d'inflexion* (P_i, T_i) pour lequel on a :

$$P_i = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} P'$$

et :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_i = \frac{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}} AP'^{(\alpha + 1)}.$$

4. Elle se termine au point (P', T') pour lequel on a, pour la *durée totale de la combustion* T', la formule

$$AP'^{\alpha}T' = \mathfrak{L}(1) - \mathfrak{L}(y_0).$$

Si $\beta < 1$, le point (P', T') est à distance finie,
Si $\beta \geqslant 1$, » » » infinie.

5. La courbe (P, t) présente, en amont du point π_0, une *partie imaginaire* (au point de vue balistique) ; elle se termine au point Ω de l'axe des t, tel que

$$O\Omega = -\frac{1}{1-\alpha}\frac{\pi_0^{1-\alpha}}{AP'}.$$

Si $\alpha < 1$ le point Ω est à distance *finie*.
Si $\alpha \geqslant 1$ » » *infinie*.

6. Ainsi, les propriétés de la courbe au voisinage de

l'origine sont réglées par *l'exposant de pression* α et au voisinage de la fin de la combustion par *l'exposant de forme* β.

34. **Théorème sur les poudres dégressives.** — Une poudre *dégressive* étant donnée, c'est-à-dire ses caractéristiques α et β, *exposants de pression et de forme*, étant définies, on peut exécuter deux espèces de tirs dans la bombe :

1° Faire varier la charge, c'est-à-dire la *densité de chargement* Δ ce qui se traduit, dans la formule de Noble et Abel, par la variation de la pression maximum P';

2° Faire varier la *vivacité* A de la poudre.

Prenons comme axes de coordonnées : 1° verticalement le rapport $\frac{P}{P'}$ qui est y; 2° horizontalement le produit $AP'^{\alpha}t$. Sur ces axes, on construira la courbe $AP'^{\alpha}t = \mathfrak{L}(y)$ avec

$$\mathfrak{L}(y) = \int_0^y \frac{dy}{y^{\alpha}(1-y)^{\beta}}.$$

Elle part du point Ω et aboutit au point 1. Ainsi donc, on peut énoncer le théorème suivant, qui suppose seulement la pression maximum P' grande devant π_0.

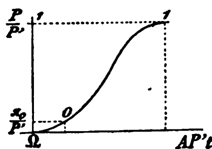


Fig. 12.

Il existe une courbe unique qui, à une échelle convenable, représente toutes les courbes (P, *t*) *obtenues en vase clos avec une poudre d'une espèce déterminée* (β donné pour les poudres dégressives). Cela résulte de l'équation

$$AP'^{\alpha}t = \mathfrak{L}(y) - \mathfrak{L}(y_0).$$

L'origine particulière des temps, pour chacune des courbes qu'on aura à considérer, est au point $\frac{\pi_0}{P'}$ de la courbe unique (point o) et la portion utile est o, 1.

35. **Les poudres progressives.** — Etudions maintenant, d'une manière sommaire, quelles seraient les propriétés des poudres *progressives*, c'est-à-dire de celles dont la fonction $\varphi(z)$ serait représentée par $z^{\beta'}$.

Entre les deux équations

$$\frac{dz}{dt} = Az^{\beta'}P^{\alpha} \qquad \text{et} \qquad P - \pi_0 = (P' - \pi_0)z$$

l'élimination de z donne

$$\frac{dP}{dt} = A(P' - \pi_0)^{1-\beta'}(P - \pi_0)^{\beta'}P^{\alpha}.$$

Posons ici,
$$y' = \frac{P}{\pi_0};$$

l'équation s'écrira

$$\frac{dy'}{dt} = A(P' - \pi_0)^{1-\beta'}\pi_0^{\alpha+\beta'-1}y'^{\alpha}(y' - 1)^{\beta},$$

de sorte qu'on aura t par la formule

$$A(P' - \pi_0)^{1-\beta'}\pi_0^{\alpha+\beta'-1}t = \int_1^{y'}\frac{dy'}{y'^{\alpha}(y' - 1)^{\beta}}.$$

Nous appellerons

$$\mathfrak{L}'(y') = \int_1^{y'}\frac{dy'}{y'^{\alpha}(y' - 1)^{\beta}}$$

la fonction qui s'introduit ici et qui a une forme analogue à la fonction $\mathcal{L}(y)$, mais où y' doit être pris plus grand que l'unité.

On aura ainsi

$$A(P' - \pi_0)^{1-\beta'}\pi_0^{\alpha+\beta'-1}t = \mathcal{L}'(y') - \mathcal{L}'(1)$$

ou, en général, pour π_0 négligeable devant P' :

$$AP'^{1-\beta'}\pi_0^{\alpha+\beta'-1}t = \mathcal{L}'(y') - \mathcal{L}'(1).$$

Courbe (P, *t*). — 1° La courbe (P, *t*) des *poudres progressives* part de l'origine ($t = 0$, $P = \pi_0$) avec une tangente horizontale $\frac{dP}{dt} = 0$.

2° Sa portion réelle (au point de vue balistique) s'arrête au point $P = P'$, c'est-à-dire $y'_m = \frac{P'}{\pi_0}$; et en ce point on a

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_M = A(P' - \pi_0)P^{\alpha}$$

ou, généralement

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_M = AP'^{(1+\alpha)}.$$

Cette formule permettra de déduire l'exposant de pression α et la *vivacité* A de tirs à densités de chargement différentes.

3° Formons $\frac{d^2P}{dt^2}$. On aura

$$\frac{d^2P}{dt^2} = A^2(P' - \pi_0)^{2-2\beta'}(P - \pi_0)^{2\beta'-1}P^{2\alpha-1}\left[(\alpha+\beta')P - \alpha\pi_0\right]$$

A l'origine, on a

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0 \qquad \text{si} \qquad \beta' > \frac{1}{2}$$

et

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \infty \qquad \text{si} \qquad \beta' < \frac{1}{2}$$

Au point (P′,T′), fin de la combustion, on a

$$\frac{d^2P}{dt^2} = A^2P'^{2\alpha}(\alpha + \beta')$$

et cette relation permettra de calculer l'*exposant de forme* β'.

4° On voit que ces théorèmes sont les correspondants, pour les poudres *progressives*, de ceux démontrés aux n°s. 27 et 28 pour les poudres *dégressives*. Ils permettent donc de déterminer les caractéristiques de ces poudres.

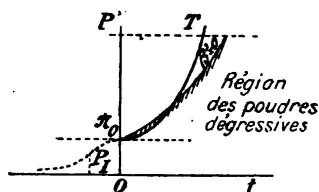


Fig. 13.

5° D'ailleurs, la courbe (P, t) présente un point d'inflexion au point P_i tel que

$$P_i = \frac{\alpha}{\alpha + \beta'}\,\pi_0.$$

Mais ce point est imaginaire, au point de vue balistique, étant situé en amont du point π_0.

6° On peut, pour les poudres *progressives* d'exposant β', établir le même théorème sur l'unité des courbes représentatives que celui du n° 34.

§ 3. — Cas particuliers de la Pyrostatique

36. **Problèmes traités.** — L'intégrale $\mathfrak{L}(y)$ qui donne la pression P en fonction du temps t et qui résout le problème de la combustion en vase clos d'une manière générale quels que soient l'*exposant de pression* α et l'*exposant de forme* β, peut être obtenue explicitement dans certains cas particuliers ; l'examen de ces cas permettra une discussion plus approfondie des propriétés de la courbe (P, t).

Nous supposerons d'abord $\alpha = 1$, conformément d'ailleurs à la valeur que l'expérience fournit pour cet exposant (43).

Nous traiterons alors le problème pour diverses valeurs de β. Nous prendrons d'abord $\beta = 0$, ce qui correspond au cas le plus simple dit des *poudres à combustion constante*, limite de nos poudres actuelles (poudres en bandes ou poudres tubulaires), pour l'hypothèse d'une inflammation instantanée, d'une régularité parfaite, et de l'absence de toute perturbation étrangère due aux bords des bandes, à la disposition des fagots, à l'amorçage, etc., etc.

Nous prendrons ensuite le cas de $\beta = \frac{1}{2}$ qui correspondrait à des cylindres, pleins de poudre brûlant concentriquement de l'extérieur à l'intérieur, c'est-à-dire au cas représenté par une *cordite* théorique. Les valeurs $\beta = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$ encadrent à peu près également, d'un côté et de l'autre, la valeur expérimentale que l'on trouve (48) pour l'exposant de forme des Poudres B, soit $\beta = \frac{1}{5}$.

Enfin nous traiterons le cas extrême de $\beta = 1$, de sorte que, par la comparaison de ces trois résultats, on pourra se faire une idée précise de l'influence de la *forme* suivant la valeur de l'exposant qui la représente et des propriétés des courbes expérimentales que l'on obtient dans le tir dans une bombe.

37. **Poudres à combustion constante** ($\beta = 0$). — 1° Elles sont définies par la double condition :

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0.$$

L'équation différentielle qui règle leur combustion (30), en posant

$$y = \frac{P}{P'}$$

est la suivante :

$$\frac{dy}{dt} = AP'(1 - y_0)y.$$

On a posé :

$$y_0 = \frac{\pi_0}{P'},$$

formule où π_0 est la pression (atmosphérique) à partir de laquelle on compte les temps et où se place l'origine de la combustion de la poudre.

En intégrant, on aura :

$$AP'(1 - y_0)t = \text{Log}\,\frac{y}{y_0},$$

ou, en rétablissant la variable P :

$$A(P' - \pi_0)t = \text{Log}\,\frac{P}{\pi_0},$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$P = \pi_0 e^{A(P' - \pi_0)t}.$$

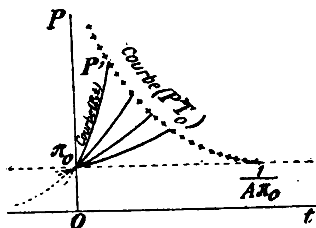


Fig. 14.

2°. *Courbe* (P, *t*). — La courbe représentée par l'une ou l'autre de ces équations part du point π_0 sur l'axe des P.

En un point quelconque de la courbe, la tangente a pour expression :

$$\frac{dP}{dt} = AP\,(P' - \pi_0).$$

On voit, qu'à l'origine, la tangente a pour valeur :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_0 = A\pi_0(P' - \pi_0),$$

ou, sensiblement, pour π_0 très petit relativement à P'

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_0 = A\pi_0 P'.$$

La courbe croît sans présenter d'inflexions, ni de particularités ; elle n'admet pas d'asymptote verticale et sa direction à l'∞ est verticale :

$$\left[\left(\frac{dP}{dt}\right)_\infty = \infty\right].$$

Mais sa partie réelle (au point de vue balistique) s'arrête lorsque P atteint la valeur P' de la pression maximum.

On a, en ce point, comme *durée totale* T'_0 *de la combustion* :

$$A(P' - \pi_0)T'_0 = \text{Log}\,\frac{P'}{\pi_0},$$

ou, sensiblement :

$$AP'T_0 = \text{Log}\,\frac{P'}{\pi_0},$$

pour P' très grand relativement à π_0.

La tangente au point (P', T'_0) est donnée par la formule :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right) = AP'(P' - \pi_0),$$

ou sensiblement :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right) = AP'^2.$$

En amont du point π_0, qui a été pris comme origine, et dans la région des pressions inférieures à la pression atmosphérique, la courbe admet l'axe des t comme asymptote, car pour $P = 0$, il faut que $t = -\infty$. Ainsi qu'on l'a vu (31), le temps qu'il faudrait pour arriver du vide à une pression finie, est donc infini.

3° *Courbe* (P', T'_0). — *Quel est le lieu des points où finit la combustion de la poudre, lorsqu'on tire avec une même poudre* (A donné) *à des charges croissantes ?*

a) Ce lieu a pour équation, entre T'_0 et P' :

$$A(P' - \pi_0)T'_0 = \text{Log}\,\frac{P'}{\pi_0},$$

ou

$$P' = \pi_0 e^{A(P' - \pi_0)T'_0}.$$

b) A l'origine, pour $P' = \pi_0$, cherchons la valeur de T'_0 qui se présente sous la forme :

$$AT'_0 = \frac{\text{Log } P' - \text{Log } \pi_0}{P' - \pi_0},$$

c'est-à-dire sous la forme $\frac{0}{0}$.

La vraie valeur, en prenant les dérivées des deux termes, est :

$$T'_0 = \frac{1}{A\pi_0}.$$

C'est la *durée* τ_0 *de combustion de la poudre à l'air libre à la pression constante* π_0 (25).

c) Si on fait $P' = \infty$, T'_0 se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ et la vraie valeur en est :

$$T'_0 = \frac{1}{AP'},$$

c'est-à-dire zéro.

Ainsi la courbe part d'un point de l'axe des *t* tel que :

$$T'_0 = \frac{1}{A\pi_0},$$

et finit asymptotiquement à l'axe des P.

d) Formons la dérivée $\frac{dP'}{dT'_0}$ qui est :

$$\frac{dP'}{dT'_0} = \frac{AP'(P' - \pi_0)}{1 - AP'T'_0},$$

en remplaçant T'_0 par sa valeur, il vient :

$$\frac{dP'}{dT'_0} = AP' \frac{(P' - \pi_0)^2}{(P' - \pi_0) - P'(\text{Log } P' - \text{Log } \pi_0)},$$

ce qui pour $P' = \pi_0$, prend la forme $\frac{0}{0}$.

La vraie valeur en est *nulle*. La courbe part donc tangentiellement à l'axe des t.

38. **Les poudres cylindriques (cordite)** $\left(\beta = \frac{1}{2}\right)$. — L'équation différentielle de la combustion s'écrit, dans ce cas :

$$\frac{dP}{dt} = A(P' - \pi_0)^{\frac{1}{2}} (P' - P)^{\frac{1}{2}} P,$$

d'où, en posant : $y = \frac{P}{P'}$

$$AP'^{\frac{1}{2}} (P' - \pi_0)^{\frac{1}{2}} t = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y(1-y)^{\frac{1}{2}}}.$$

On intégrera en posant :

$$1 - y = x^2,$$

d'où :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y(1-y)^{\frac{1}{2}}} = -2\int_{y_0}^{y} \frac{dx}{1-x^2} = -\int_{y_0}^{y} \frac{dx}{1-x} - \int_{y_0}^{y} \frac{dx}{1+x}$$

L'intégrale en est :

$$\text{Log}\,(1 - x) - \text{Log}\,(1 + x) = \text{Log}\,\frac{1-x}{1+x}.$$

On a donc :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y(1-y)^{\frac{1}{2}}} = \text{Log}\,\frac{1-\sqrt{1-y}}{1-\sqrt{1-y_0}} \quad \frac{1+\sqrt{1-y_0}}{1+\sqrt{1-y}}.$$

La formule donnant t en fonction de P sera ainsi :

$$AP'^{\frac{1}{2}}(P'-\pi_0)^{\frac{1}{2}}\, t = \text{Log}\, \frac{\sqrt{P'}-\sqrt{P'-P}}{\sqrt{P'}-\sqrt{P'-\pi_0}}\, \frac{\sqrt{P'}+\sqrt{P'-\pi_0}}{\sqrt{P'}+\sqrt{P'-P}}.$$

Lorsque π_0 sera très petit devant P', on pourra écrire l'équation :

$$AP't = \text{Log}\, \frac{4P'}{\pi_0}\, \frac{\left[\sqrt{P'}-\sqrt{P'-P}\right]^2}{P}.$$

On pourrait encore intégrer en posant $1 - y = \sin^2 \varphi$ sous la forme :

$$AP'^{\frac{1}{2}}(P'-\pi_0)^{\frac{1}{2}}\, t = 2\, \text{Log}\, \frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Courbe (P, t). — La courbe (P, t) part du point π_0 avec une tangente :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_0 = A\pi_0(P'-\pi_0).$$

Elle a ainsi même tangente à l'origine que la courbe $\beta = 0$ et aussi, comme on sait (33), que les courbes β quelconques.

Elle présente une *inflexion* au point tel (27), que

$$P_i = \frac{2}{3} P'$$

et finit *horizontalement* au point $\left(P', T'_{\frac{1}{2}}\right)$ défini par la relation

$$AP'^{\frac{1}{2}}(P'-\pi_0)^{\frac{1}{2}}\, T'_{\frac{1}{2}} = \text{Log}\, \frac{\sqrt{P'}+\sqrt{P'-\pi_0}}{\sqrt{P'}-\sqrt{P'-\pi_0}}$$

ce qui, en supposant π_0 négligeable devant P′, s'écrira

$$AP'T'_{\frac{1}{2}} = \text{Log}\,\frac{4P'}{\pi_0}.$$

Comparant cette valeur $T'_{\frac{1}{2}}$ de la durée totale de la combustion à la durée T'_0 dans le cas de $\beta = 0$, on trouve

$$AP'\left(T'_{\frac{1}{2}} - T_0\right) = \text{Log}\,\frac{4P'}{\pi_0} - \text{Log}\,\frac{P'}{\pi_0} = \text{Log}\,4$$

On a ainsi

$$T'_{\frac{1}{2}} = T'_0 + \frac{1}{AP'}\,\text{Log}\,4.$$

La différence des durées totales est donc inversement proportionnelle à la pression maximum P′ et à la *vivacité* A de la poudre.

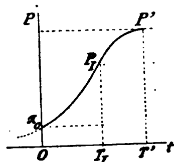


Fig. 15.

La durée T_i de la combustion jusqu'au point d'*inflexion* s'obtiendra en faisant $P_i = \frac{2}{3}P'$ dans t. On trouve (π_0 négligeable devant P′)

$$AP'T_i = \text{Log}\,\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\,\frac{4P'}{\pi_0}$$

c'est-à-dire

$$T_i = T'_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{AP'}\,\text{Log}\,(2-\sqrt{3}).$$

En amont du point π_0, la courbe (P, t) tend asymptotiquement vers les $t = -\infty$; cela tient ainsi, qu'on l'a vu (31), à l'exposant de pression pris égal à 1.

Courbe $\left(P', T'_{\frac{1}{2}}\right)$. — On passera point par point de la

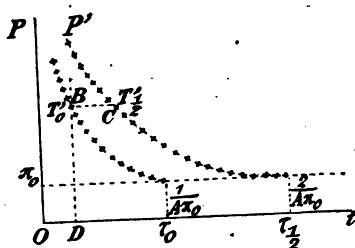


Fig. 16.

courbe (P', T'_0) à la courbe $\left(P', T'_{\frac{1}{2}}\right)$ en prenant BC tel que

$$BC \times BD = \text{const.}$$

C'est la traduction de la formule

$$T'_{\frac{1}{2}} = T'_0 + \frac{1}{AP'} \operatorname{Log} 4.$$

Cette relation a lieu pour des valeurs P' grandes relativement à π_0. Vers l'origine, les deux courbes s'écartent davantage, la courbe $\left(P', T'_{\frac{1}{2}}\right)$ tendant pour $P' = \pi_0$, vers la valeur

$\tau_{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{A\pi_0}$ qui est la durée de combustion de la poudre

$\beta = \dfrac{1}{2}$ à l'air libre (25) et qui est double de la valeur

$\tau_0 = \dfrac{1}{A\pi_0}$ de la combustion à l'air libre de la poudre $\beta = 0$.

39. **Cas de** $\beta = 1$. — On a alors

$$\frac{dP}{dt} = A(P' - P)P$$

et

$$AP't = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y(1-y)}$$

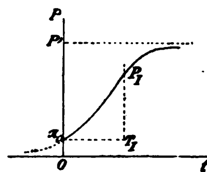


Fig. 17.

ce qui s'intégrera par la formule

$$AP't = \operatorname{Log} \frac{P}{\pi_0} \frac{P' - \pi_0}{P' - P}.$$

Courbe (P, t). — On a toujours, à l'origine, la même tangente

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_0 = A\pi_0 (P' - \pi_0)$$

que dans les cas précédents.

Le point d'*inflexion* a lieu (27) au point P_i tel que

$$P_i = \frac{1}{2} P'.$$

La durée totale de la combustion est *infinie*.

La durée de la combustion jusqu'au point d'inflexion est donnée par la formule

$$AP'T_i = \text{Log} \frac{P' - \pi_0}{\pi_0}$$

ou, pour π_0 petit :

$$AP'T_i = \text{Log} \frac{P'}{\pi_0}$$

c'est-à-dire que la durée T_i du cas de $\beta = 1$ est la même que la durée totale T'_0, pour le cas de $\beta = 0$. Au point d'inflexion on a

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_i = \frac{1}{4} AP'^2.$$

A cause de la proportionnalité approchée de P et de z (30), on en déduit qu'au point d'*inflexion* la moitié seulement de la poudre est brûlée au point P_i.

En amont de l'origine, la courbe (P, t) est asymptotique à l'axe des t. Elle est donc indéfinie dans les deux sens.

40. Résumé. — La figure ci-dessous résume les propriétés démontrées en rapprochant les courbes (P, t) dans les trois hypothèses

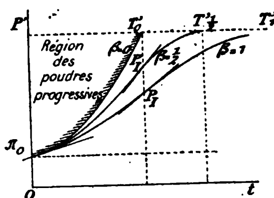


Fig. 18.

$$\beta = 0, \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = 1$$

pour une même valeur de la charge de poudre et de la vivacité A.

1° Les trois courbes ont même tangente à l'origine

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_0 = A\pi_0 (P' - \pi_0)$$

ou, pour π_0 très petit devant P' :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_0 = A\pi_0 P'$$

2° En amont de l'origine π_0, elles admettent l'axe des t pour asymptote.

3° *Courbe* $\beta = 0$. — Elle croît d'une manière continue; son *équation* est

$$A (P' - \pi_0)\, t = \text{Log}\, \frac{P}{\pi_0}.$$

La *durée totale* de la combustion T'_0 est donnée par la formule

$$AP'T'_0 = \text{Log}\, \frac{P'}{\pi_0}$$

(pour P' très grand relativement à π_0).

La *tangente finale* au point (T'_0, P') a pour expression

$$\left(\frac{dP}{dt}\right) = AP'^2.$$

4° *Courbe* $\beta = \frac{1}{2}$. — Son *équation* est

$$AP'^{\frac{1}{2}}(P' - \pi_0)^{\frac{1}{2}} t = \text{Log} \frac{\sqrt{P} - \sqrt{P' - P}}{\sqrt{P'} - \sqrt{P' - \pi_0}} \cdot \frac{\sqrt{P'} + \sqrt{P' - \pi_0}}{\sqrt{P'} + \sqrt{P' - P}}.$$

La *durée totale* de la combustion $T'_{\frac{1}{2}}$ est donnée par la formule

$$AP'T'_{\frac{1}{2}} = \text{Log} \frac{P'}{\pi_0} + \text{Log}\, 4.$$

La tangente finale est *horizontale*.

La courbe présente un point d'*inflexion* au point

$$P_i = \frac{2}{3} P'.$$

La *durée* T_i *de la combustion* jusqu'au point P_i est donnée par la formule

$$AP'T_i = \text{Log} \frac{P'}{\pi_0} + \text{Log}\, 4(2 - \sqrt{3}).$$

La *tangente au point* P_i est déterminée par la relation

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_i = \frac{2}{3\sqrt{3}} AP'^2.$$

5° *Courbe* $\beta = 1$. — Son *équation* est

$$AP't = \text{Log} \frac{P}{\pi_0} \frac{P' - \pi_0}{P' - P}.$$

La durée *totale de combustion* est infinie.

La courbe présente un point *d'inflexion* défini par les deux équations

$$P_i = \frac{1}{2} P', \quad AP'T_i = \text{Log} \frac{P'}{\pi_0}$$

c'est-à-dire quand on a

$$T_i = T'_0.$$

On a, pour la *tangente* au point d'inflexion :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_i = \frac{1}{4} AP'^2.$$

§ 4. — Détermination expérimentale des caractéristiques des poudres

41. **Tracés de la bombe.** — Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de faire connaître les résultats expérimentaux qui ont été obtenus, en vase clos, avec les poudres sans fumée et qui ont permis de fixer les caractéristiques de ces poudres.

D'après ce qui a été dit dans les paragraphes précédents, les *caractéristiques* d'une poudre sont au nombre de *cinq*.

Trois déterminent le *genre* de la poudre et ne varient pas sensiblement quand on parcourt l'échelle des poudres, passant des plus vives aux plus lentes et d'une forme quelconque à une autre forme; ces caractéristiques paraissent donc liées aux propriétés physiques des gaz permanents engendrés par la combustion et à la nature même de la poudre; elles changent des poudres noires aux poudres à la nitrocellulose, de celles-ci aux poudres à la nitroglycérine, etc.

Ces trois *caractéristiques* du *genre* sont :

f la *force de la poudre* ;

η le *covolume* ;

α l'*exposant de pression*.

Deux autres caractéristiques définissent l'*espèce* de la

poudre appartenant au *genre* déterminé ci-dessus. Elles dépendent de la forme des brins de poudre, de leur régularité, de la disposition de la charge, de l'amorçage, etc.

Ce sont :

la *fonction de forme* $\varphi(z)$; par exemple, pour les poudres *dégressives*, l'exposant β de *forme*;

la *vivacité* A de la poudre.

On pourrait même, poussant plus loin l'analogie avec les sciences naturelles, distinguer l'*espèce* d'une poudre par sa *fonction de forme* $\varphi(z)$ ou sa *forme* β et dans l'*espèce*, la *variété* définie par la *vivacité* A.

Pour la détermination de ces cinq caractéristiques, les tirs en vase clos sont nécessaires et suffisants. La seule mesure de la pression maximum à diverses densités de chargement, permet (7) la détermination de f et de η reliés à la pression maximum P′ par la formule de Noble et Abel

$$P' = f\frac{\Delta}{1 - \eta\Delta}.$$

Pour la détermination des trois autres caractéristiques α, β et A, on utilise les tracés continus des courbes (P, t) et l'application des théorèmes démontrés précédemment permet (27, 28) d'obtenir ces trois nombres pour une poudre donnée.

42. **Expériences de M. Vieille.** — 1. Dans un mémoire fondamental « sur le mode de combustion des substances explosives », M. Vieille[1] a, le premier, interprété les tracés obtenus dans la bombe et cherché une détermination des caractéristiques des poudres. Ce mé-

[1] VIEILLE. **3**. p. 256.

moire, justification des idées théoriques qui avaient conduit M. Vieille à l'invention des Poudres sans fumée, et aux règles d'utilisation de ces substances dans les bouches à feu, doit être considéré comme la base des recherches expérimentales sur la Pyrostatique. Si des expériences ultérieures, l'emploi d'instruments (crushers) plus précis, et une conception différente du mode de combustion des poudres (14), ont pu nous conduire à modifier certains résultats numériques, ce n'est qu'en suivant la voie tracée par M. Vieille, que nous avons pu donner une seconde approximation des lois physiques de la combustion de la poudre.

2. M. Vieille se propose d'abord de démontrer que les poudres colloïdales, *placées en fagot dans une bombe*, brûlent par couches parallèles comme un brin unique et il prend pour critérium de ce mode de combustion le théorème suivant[1] : « pour des poudres découpées en grains ou brins de forme géométrique semblable, et tirées à la même densité de chargement, les durées totales de combustion sont proportionnelles aux dimensions linéaires des éléments ».

Malheureusement, ce théorème est bien plus général, car il s'applique à toutes les poudres qui ont une *fonction de forme* déterminée.

C'est ce qui résulte de la formule (33) :

$$AP'^{\alpha}T' = \mathfrak{L}(1) - \mathfrak{L}(y_0).$$

Dans cette formule, le second membre est une constante et la *vivacité* A a pour expression géométrique $\frac{S_0 w \delta}{Q}$,

[1] VIEILLE 3. p. 275.

c'est-à-dire est inversement proportionnelle à une dimension linéaire, du grain ou du brin (18).

Ainsi, la démonstration expérimentale de M. Vieille, prouve que les poudres colloïdales admettent une fonction de forme, c'est-à-dire se comburent suivant la même loi (d'ailleurs arbitraire), du commencement à la fin de leur combustion. Il n'en est pas de même des poudres noires qui, quoique affectant la forme de grains de dimensions quelconques, se rompent dès les premières pressions ascendantes en éléments de dimensions bien plus faibles, mais sans aucune relation avec la forme primitive du grain. Il n'existe donc pas, à proprement parler, de *fonction de forme* pour les poudres noires et les expériences de M. Vieille ont nettement mis en évidence cette différence fondamentale dans le mode de combustion des deux espèces de poudre.

On voit en même temps de quelle nature est le véritable progrès scientifique réalisé par l'adoption des poudres colloïdales ; ce fut de substituer à l'indétermination et à l'imprécision des poudres noires, la constance des lois physiques auxquelles obéit la substance nouvelle ; on devient alors maître, à volonté, en agissant sur la forme et les dimensions de la poudre, d'en régler les effets balistiques suivant la meilleure utilisation dans une arme donnée.

3. L'expérience permet encore de démontrer, d'une manière directe, l'impossibilité, avec les poudres plates, en lamelles, telles qu'elles sont employées en France (épaisseur e très petite relativement aux autres dimensions l et m de la poudre) d'admettre une combustion uniforme de tout le fagot, par *tranches parallèles*, à la manière d'un seul brin. En effet, tous les tracés obtenus dans la bombe avec ces poudres présentent un *point d'inflexion* qui est même fort loin du point de pression maximum.

Cherchons la condition pour qu'une poudre dont la fonction de forme est (22)

$$\varphi(z) = 1 - kz$$

avec

$$k = 2e\,\frac{l + m}{ml}$$

admette un point *d'inflexion réel.*

Pour cela, on écrira d'abord l'équation différentielle de ces poudres :

$$\frac{dP}{dt} = A\,(P' - \pi_0)\left(1 - k\,\frac{P - \pi_0}{P' - \pi_0}\right)P^{\alpha}$$

puis, on prendra la dérivée :

$$\frac{d^2P}{dt^2} = A\,(P' - \pi_0)\,P^{\alpha - 1}\,\frac{dP}{dt}\left[\alpha\,(P' - \pi_0) - \alpha k\,(P - \pi_0) - kP\right]$$

ce qui, en négligeant π_0 devant P_i et P', donne pour valeur P_i de la pression d'inflexion :

$$P_i = \frac{\alpha}{\alpha + 1}\,\frac{P'}{k}.$$

Pour que P_i soit *réel*, on doit avoir $P_i < P'$ c'est-à-dire :

$$\frac{\alpha}{\alpha + 1}\,\frac{1}{k} < 1,$$

ou bien, en remplaçant k par sa valeur :

$$e > \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\alpha + 1}\,\frac{lm}{l + m}.$$

Le rapport $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha + 1}$ est égal à $\frac{1}{4}$; faisant, par exemple, $m = \frac{l}{4}$ il viendra :

$$e > \frac{l}{20}$$

condition pour que le point d'inflexion coïncide avec le point

de pression maximum. Cette condition est loin d'être réalisée avec les poudres en bandes actuellement employées pour le tir; le rapport $\frac{e}{l}$ est de l'ordre de $\frac{1}{50}$ à $\frac{1}{100}$.

4. D'ailleurs, avec ces poudres, la tangente au point P′ n'est pas horizontale à la fin de la combustion, si on admet que celle-ci se fait simultanément par tranches parallèles, puisqu'on a :

$$\frac{dP}{dt} = A(P' - \pi_0)(1 - k)P'^{\alpha} = \text{sensiblement } A(1 - k)P'^{1+\alpha}.$$

La courbe (P, t) des poudres en lamelles admet une tangente horizontale au point défini par l'équation :

$$P = \frac{P'}{k} = \frac{ml}{2e(l + m)} P'$$

ce qui exigerait que e ait la valeur :

$$e = \frac{ml}{2(l + m)}$$

pour que la tangente soit horizontale au point P′.

Faisant, par exemple, $l = 4m$, il faudrait que $e = \frac{l}{10}$, ce qui est très loin d'être réalisé.

5. Pour toutes ces raisons, le double fait que la courbe (P, t) expérimentale présente une *inflexion* et finit *horizontalement* pour la pression maximum P′, constitue la démonstration directe et rigoureuse qu'une charge de poudre colloïdale telle que celles en lamelles actuellement employées en France dans les armes, ne peut être, sans erreur sensible, considérée comme brûlant par couches parallèles. Chacun des brins qui la composent peut d'ailleurs, si l'on veut, être considéré comme brûlant à peu près suivant cette loi. Mais les phénomènes perturbateurs dus à la propagation de l'inflammation, à l'irré-

gularité des brins, à leur position relative dans la bombe etc. (15) modifient totalement le caractère purement géométrique de la loi élémentaire de la combustion et conduisent, nécessairement, à lui substituer, pour les charges de poudre, une loi *physique* qu'il appartient à l'expérience seule de déterminer.

5. Au point de vue de la théorie qui a été exposée aux paragraphes précédents, l'hypothèse de la combustion géométrique par couches parallèles, conduit donc M. Vieille à adopter pour *l'exposant de forme* la valeur $\beta = 0$.

Pour obtenir l'exposant α, M. Vieille considère alors un tracé unique d'une poudre déterminée, pour lequel il détermine, par la loi de Noble et Abel, la quantité de poudre brûlée en fonction de la pression, puis en fonction du temps, la vitesse de combustion qui en résulte ; rapprochant cette vitesse des pressions au même temps, on a la loi de variation de cette vitesse en fonction de la pression, c'est-à-dire l'exposant α.

M. Vieille a trouvé, en moyenne $\alpha = \frac{2}{3}$.

Mais, il est bien évident que, par ce procédé, la détermination de α dépend de l'hypothèse faite sur β, puisque la valeur de β s'introduit dans l'expression du poids de poudre brûlée pour une pression déterminée. Au point de vue de la théorie que nous avons exposée, cela veut dire que les exposants α et β ne sont pas indépendants l'un de l'autre, dans une expérience unique ; il faut, comme nous l'avons vu, deux expériences accolées pour qu'on puisse déterminer la valeur de ces deux caractéristiques.

6. En résumé, les expériences de M. Vieille mettaient nettement en évidence l'existence d'une fonction de forme pour les poudres colloïdales, mais ne permettaient pas la

détermination précise des *exposants de forme* et de *pression*; le premier étant admis à priori par M. Vieille comme sensiblement égal à zéro, la valeur du second dépendait de cette hypothèse.

43. **Expériences du LCM.** — Nous avons entrepris, au LCM, des expériences méthodiques pour la détermination des caractéristiques des poudres [1].

Elles ont porté sur les Poudres B, et embrassent toute l'échelle des pressions compatibles avec la résistance de l'éprouvette (4000 kilogrammes environ). On a déjà parlé de ces expériences au n° 9 en tant qu'elles ont servi à la détermination des caractéristiques f et η.

1. Les théorèmes établis aux n°s 27 et 28 ont montré que les trois *caractéristiques* A, α et β d'une poudre pouvaient s'obtenir par la seule considération du point d'inflexion de la courbe (P, t). On s'affranchit ainsi, d'abord, des difficultés rencontrées par M. Vieille qui considérait la durée totale de la combustion, dont l'origine et la fin sont très mal déterminées, et qui a été obligé d'employer d'ingénieux procédés expérimentaux pour apprécier ces instants avec précision.

La détermination des caractéristiques A, α et β, exige seulement la connaissance, pour différentes valeurs de Δ, avec une même poudre, des trois quantités :

P', pression maximum,

P_i, pression d'inflexion,

$\left(\frac{dP}{dt}\right)_i$ valeur de la tangente au point d'inflexion de la courbe (P, t).

CH.

Les caractéristiques α, β et A sont liées alors à ces trois nombres, par les relations :

$$P_i = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} P'$$

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_i = AP'^{(1 + \alpha)} \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}}.$$

On remarquera que ces théorèmes ne font intervenir ni la *force* f de la poudre ni le *covolume* η, c'est-à-dire aucune des deux autres caractéristiques de la poudre.

3. Les résultats expérimentaux sont les suivants : pour une poudre d'une *espèce* donnée :

a) Le rapport $\frac{P'}{P_i}$ est trouvé très *sensiblement* constant dans tous les tirs, quelle que soit la poudre employée (A variant), et quelle que soit la *charge*. Sa valeur, pour les poudres réglementaires dans la marine française (Poudres (BM), en bandes), est voisine de 1,20; pour des poudres telles que celles à fusil (BF), qui se présentent sous forme de petits carrés, on trouve $\frac{P'}{P_i} = 1,50$.

b) Le rapport $\frac{\left(\frac{dP}{dt}\right)_i}{P'^2}$ *est trouvé très sensiblement une constante dans le tir d'une même poudre* (Δ variant). On en déduit par suite $\alpha = 1$, pour l'*exposant de pression*. *La vitesse de combustion de la poudre est ainsi proportionnelle à la pression.*

c) Puisque α est égal à 1, le premier théorème qui donne le rapport $\frac{P_i}{P'} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ devient $\frac{P_i}{P'} = \frac{1}{1 + \beta}$ ce qui permet la détermination de β. On trouve $\beta = \frac{1}{5}$

pour les Poudres (BM) et $\beta = \frac{1}{2}$ pour les Poudres à fusil (BF).

Celles-ci donc, malgré leur forme de petits carrés très minces, fonctionnent à peu près, au tir, comme la cordite théorique (38).

d) Enfin, revenant à la deuxième équation, la détermination de la *vivacité* A se fera immédiatement. Le nombre A varie naturellement beaucoup avec la nature de la poudre employée, puisque c'est sur cette variable qu'on agit pour adapter aux conditions de tir les plus variées et aux armes les plus diverses une substance chimiquement identique.

Disons seulement, qu'en pratique, la *vivacité* A varie de 0, 50 pour les armes portatives à 0.03 pour les gros canons de la marine. L'unité est la *seconde* dans l'expression de la *vivacité*.

4° Pour le détail des expériences et la discussion des chiffres trouvés, on renverra au mémoire original paru, au Mémorial de l'Artillerie de la Marine [1].

[1] Ch. 3.

DEUXIÈME PARTIE

PYRODYNAMIQUE PHYSIQUE

CHAPITRE III

COMBUSTION DE LA POUDRE DANS LE CANON

§ I. — L'ÉTAT DES GAZ DANS L'AME DU CANON

44. **Méthode suivie dans l'étude de la Pyrodynamique.** — L'étude de la combustion en vase clos, ou *Pyrostatique,* correspond au cas de l'action de la poudre sur elle-même, sans production de travail extérieur. La *Pyrodynamique* qui traite du mouvement du projectile dans l'âme du canon, a besoin, pour développer ses théories, qu'aux lois statiques trouvées précédemment viennent s'adjoindre d'autres lois physiques permettant de mettre le problème en équations.

On sait déterminer, par la Pyrostatique, la *force de la poudre* f, le *covolume* η, *l'exposant de pression* α, la *fonction de forme* $\varphi(z)$ et la *vivacité* A, quantités qui caractérisent les unes (f, η, α), le *genre* de la poudre (nitrocellulose pure, poudre noire, balistite, nitroglycérine, etc.), l'autre $\varphi(z)$, l'*espèce* de la poudre (tubulaire, prismatique, cylindrique, en bandes, etc.), l'autre, enfin, A, la *variété* de la

poudre (épaisse ou mince, vive ou lente, etc.). Il est nécessaire maintenant, soit en admettant, à priori, quelque hypothèse, soit en procédant à des recherches expérimentales spéciales, de posséder deux nouvelles lois physiques : la loi de *distribution des pressions*, suivant l'axe de la bouche à feu et la loi de *détente des gaz*, fournis par la combustion de la poudre.

Mais, disons dès maintenant que si, sur ces bases, on peut chercher à mettre en équations le problème de la Balistique Intérieure et à ramener cette science à la Mécanique Rationnelle, il est bien certain qu'on ne peut arriver, dans cette étude, qu'au *premier terme de la série*, qui donnerait la solution rigoureuse. Outre les inexactitudes de détail que comportent les lois expérimentales trouvées, outre les hypothèses simplificatives nécessaires pour aborder le problème, — causes qui, à elles seules, donneraient naissance à des termes du second ordre dans le développement de la série, — bien d'autres termes du même ordre prendront naissance par l'omission systématique ou ignorée d'une foule de circonstances du mouvement.

La discussion des lois physiques de l'action des gaz dans l'âme du canon et des termes perturbateurs du mouvement, discussion d'où résultera l'établissement des équations différentielles de la Pyrodynamique, doit donc être faite avec grand soin, pour qu'on sache avec précision la signification de ces équations, le degré de confiance qu'on doit leur accorder, la manière dont on doit les appliquer en pratique, les services qu'elles peuvent rendre, et les conditions où elles sont capables de représenter avec fidélité les phénomènes réels.

Dans la plupart des écrits sur la Balistique Intérieure, la discussion physique de la base des équations différen-

tielles employées est très brève : on se borne à appliquer quelques lois simples de Thermodynamique, de sorte qu'il semblerait que la question ne présente pas de réelles difficultés, et que, en revanche, les équations obtenues ont le droit de bénéficier de la rigueur des lois thermodynamiques invoquées. Il est nécessaire de procéder à un examen plus approfondi, pour que, au risque d'avouer peut-être un peu plus de vague et d'imprécision dans les formules, celles-ci traduisent fidèlement les incertitudes des principes initiaux en laissant arbitraires, et sous forme générale, les fonctions ou les coefficients dont la détermination théorique est imparfaite et dont l'expression ne peut être que symbolique.

45. **La détente adiabatique des gaz.** — Rien n'est plus simple, avec les théories ordinairement présentées dans les ouvrages sur la Balistique Intérieure, que d'écrire l'équation différentielle du mouvement du projectile dans l'âme du canon, quand on suppose que les gaz de la poudre sont complètemement formés avant le départ du projectile, c'est-à-dire dans le cas d'une *combustion instantanée*.

1° Admettons, en effet, que les gaz de la poudre subissent une *transformation adiabatique* pendant leur détente, de telle sorte que c étant le volume variable de l'âme derrière le projectile, et P la pression au moment où le projectile est en c, on ait à chaque instant

$$P\,(c - \varpi')^n = \text{const.}$$

Le volume occupé par les gaz de la poudre est bien, en effet, égal à c diminué de $\eta\varpi$ ou de ϖ' (10).

La constante est égale au produit de la pression

$$P' = \frac{f\varpi}{c' - \varpi'}$$

qui existait à l'origine, dans le vase clos de capacité c (chambre à poudre), par $(c' - \varpi')^n$.

On aura donc :

$$P(c - \varpi')^n = f\varpi (c' - \varpi')^{n-1}$$

équation où n désigne le rapport des chaleurs spécifiques sous pression constante et sous volume constant.

2° Soit, d'autre part, x l'espace parcouru, au temps t, par le projectile dont la masse est m ; on aura, sous l'action de la pression P, la formule

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pi a^2}{4} P$$

a, étant le diamètre de l'âme.

On écrira la même équation, en introduisant la vitesse u du projectile :

$$m \frac{du}{dt} = \frac{\pi a^2}{4} P,$$

Comme *unités*, on prendra, dans toutes les formules de cet ouvrage, la vitesse du projectile u en *mètres*, le poids p qui entre dans m, en *kilogrammes*, le diamètre a de l'âme en *centimètres*, les volumes c et c' en *décimètres cubes*. On aura donc, avec ces unités :

$$\frac{\pi a^2}{4} dx = 10\, dc$$

pour que x soit exprimé en mètres, et la vitessse u en mètres par seconde.

On écrira, par suite :

$$m \frac{udu}{dx} = \frac{\pi a^2}{4} P$$

ou bien :

$$udu = 10 \, \mathrm{P}dc.$$

Remplaçant P par sa valeur trouvée en fonction de c, on aura :

$$mudu = 10 \, f\varpi \frac{(c' - \varpi')^{n-1}}{(c - \varpi')^n} \, dc$$

ce qu'on intégrera par la formule

$$\frac{1}{2} mu^2 = \frac{10 f\varpi}{n-1} \left[1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'} \right)^{n-1} \right]$$

en suppposant que la vitesse est nulle à l'origne du mouvement, c'est-à-dire pour $c = c'$.

On posera :

$$\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'} = \frac{1 - \Delta}{\rho - \Delta} = \theta$$

ρ désignant le rapport $\frac{c}{c'}$, et s'appelant la *division* de l'âme.

Par suite, il viendra :

$$u^2 = \frac{2}{n-1} \, \frac{10 f\varpi}{m} (1 - \theta^{n-1}).$$

3° Telle est la forme simple sous laquelle peut s'exprimer, dans le cas le plus simple, la vitesse du projectile en fonction de l'espace parcouru c, et telle est l'équation fondamentale qu'on admet généralement à la base de la Balistique Intérieure.

Mais, de bien nombreuses hypothèses ont été nécessaires pour établir cette équation, et il s'agit de savoir maintenant quelle signification physique il faut donner aux lettres de cette relation pour qu'elle puisse représenter avec quelques

chances de succès les phénomènes réels de la Pyrodynamique.

46. **Vitesse limite.** — Quand on fait $c = \infty$, c'est-à-dire lorsqu'on suppose l'âme du canon indéfiniment prolongée, la formule devient :

$$U^2 = \frac{2}{n-1} \cdot \frac{10 f \varpi}{m}.$$

Cette vitesse U ne dépend donc que du poids ϖ de la charge et de la *force* f de la poudre. Le terme $\frac{10 f \varpi}{n-1}$ est le travail total qui est ainsi accompli lorsque la transformation adiabatique est terminée. On sait que cela suppose que les gaz de la poudre ont épuisé toute leur chaleur et sont descendus au zéro absolu.

La vitesse limite U n'est pas extrêmement élevée. Si on fait par exemple :

$$n = 1 + \frac{1}{4}, \quad f = 10\,000, \quad m = \frac{p}{g}, \quad p = 2\varpi, \quad g = 10.$$

On trouve :

$$U^2 = 400\,000,$$

d'où

$$U = 2\,000 \text{ mètres},$$

c'est-à-dire le double environ des vitesses que l'artillerie navale obtient en service courant.

47. **Valeur de n.** — Admettant la simplicité de la loi de détente que traduit l'équation de la vitesse, quelle valeur faudrait-il admettre pour l'exposant n, rapport des deux chaleurs spécifiques ? A la vérité, on ne sait rien de

la valeur de n aux hautes températures (2000 à 3000°) et aux hautes pressions dont il s'agit ici. Il est possible que n ne soit pas constant : certaines expériences dues à MM. Mallard et Le Châtelier[1] auraient montré que le nombre n décroit quand la température augmente. Au lieu de la valeur 1, 4 qu'on trouve pour les gaz à la pression et à la température ordinaires, on admet souvent que n peut être pris égal à 1,1, pour les gaz de la poudre.

La recherche expérimentale directe des chaleurs spécifiques et de leur rapport n, dans les conditions de température et de pression réalisées en présence des explosifs est un problème très difficile; il prend, en particulier, comme base la mesure absolue des pressions de la poudre, c'est-à-dire la théorie des *crushers*.

Aucune expérience n'a été faite encore dans les conditions où cette théorie se trouve à l'heure actuelle, ni sur les Poudres sans fumée en service ; d'ailleurs ces recherches qui rentrent dans le domaine de la *Théorie des Explosifs*, plutôt que dans celui de la Balistique Intérieure ne peuvent avoir, pour l'objet actuel, ainsi qu'on va le voir, qu'une importance de second ordre.

En effet, quand on a écrit l'équation de la détente, on a supposé, si n est le rapport des deux chaleurs spécifiques, que toute l'énergie perdue par les gaz de la poudre était employée à la propulsion du projectile de masse m. Or, cette hypothèse est inexacte pour trois raisons :

1° Les gaz de la charge participent au mouvement du projectile ;

2° Il se produit des mouvements intérieurs dans la masse gazeuse ;

[1] SARRAU. **6**. p. 101.

3° Il y a des pertes de force vive et des résistances passives pendant le trajet du projectile dans l'âme.

48. **Le mouvement dans l'âme d'après Hugoniot.** — Pour étudier des conditions réelles du phénomène, et se rendre compte du mécanisme de la détente des gaz dans l'âme du canon, il est nécessaire de citer ici quelques lignes que le capitaine Hugoniot a consacrées au problème qui nous occupe[1].

« Un gaz est renfermé dans un cylindre. L'une des bases est inébranlable, l'autre est fermée par un piston de masse M. On néglige la pression extérieure qui s'exerce sur le piston. Le système étant en repos et abandonné à lui-même, on demande le mouvement que prendra le piston et le mouvement du gaz.

« Ce problème a été l'objet des travaux de plusieurs géomètres, parmi lesquels il faut citer particulièrement Lagrange qui lui a consacré un Mémoire resté d'abord inédit et que Poisson a fait publier plus tard dans le Journal de l'Ecole Polytechnique.

« C'est en cherchant à déterminer analytiquement le mouvement des projectiles dans l'âme des bouches à feu que Lagrange a été conduit à aborder ce problème. Supposant, en effet, la poudre entièrement brûlée avant que le projectile ait commencé son mouvement, les produits de la combustion constituent un fluide que l'on peut regarder comme en repos à l'instant initial, la pression étant constante et la vitesse nulle en tous ses points.

« La masse du canon étant très grande par rapport à celle du boulet, la bouche à feu peut être regardée, sans

[1] Hugoniot. p. 150.

grande erreur, comme inébranlable. Le boulet est d'ailleurs mis en mouvement par la seule pression du gaz fluide.

« Lagrange admettait que la pression du fluide était, pendant la détente, en raison inverse de la puissance *m* du mouvement; dans ces conditions, l'équation aux dérivées partielles qui le régit n'est autre que celle qui correspond aux gaz parfaits. Lagrange cherchait à déterminer l'intégrale qui convient aux conditions particulières du problème. Il paraît, au reste, avoir été peu satisfait des résultats obtenus, car il n'a pas jugé à propos de livrer le résultat de ses calculs à la publicité.

« Plus récemment, Piobert a fait du même problème l'objet principal de ses travaux. Il admettait, comme Lagrange, que la pression des produits de la combustion de la poudre est en raison inverse de la puissance *m* du volume qu'ils occupent. Cette hypothèse semblait d'ailleurs assez exactement justifiée par les expériences de Rumford. L'équation aux dérivées partielles, qui régit le mouvement du fluide, était donc encore, pour Piobert, celle qui correspond aux gaz parfaits.

« Piobert a un peu compliqué son problème en cherchant à tenir compte du mouvement du canon. Il est arrivé au moyen de calculs très longs et dépourvus de toute élégance, à obtenir des formules qui ne peuvent aucunement représenter le phénomène, attendu qu'elles sont en désaccord avec l'équation aux dérivées partielles.

« L'insuccès des tentatives de Lagrange et de Piobert paraît avoir découragé les géomètres. Le problème a d'ailleurs perdu une grande partie de l'intérêt qu'il présentait pour les artilleurs. L'hypothèse de la combustion instantanée de la poudre s'écartait déjà beaucoup de la

vérité à l'époque où Lagrange et Piobert se livraient à leurs recherches. Cependant, l'ancienne poudre à canon dont les grains avaient de faibles dimensions était alors exclusivement employée. Aujourd'hui, l'artillerie fait usage de poudre à gros grains dont la combustion s'opère avec lenteur et n'est même pas toujours complètement achevée quand le projectile sort de la pièce. L'hypothèse d'une combustion instantanée ne pourrait donc conduire qu'à de grossières erreurs.

« D'autre part, la relation qui existe pendant la détente entre la pression et le volume des produits de la combustion de la poudre, est loin d'être aussi simple que le supposaient Lagrange et Piobert. L'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement différerait donc de celle des gaz parfaits, même si l'on négligeait le temps nécessaire pour effectuer la combustion complète de la charge.

« La question présente toutefois un certain intérêt au point de vue spéculatif et au point de vue historique. Dans ce qui va suivre, on donnera une partie de la solution ; mais auparavant, il n'est pas inutile de montrer la cause de l'insuccès des tentatives de Lagrange et de Piobert.

« Supposant que la tranche extrême du gaz, en contact avec le piston ou le projectile, ait pour abscisse $x = 0$, on désigne par λ l'abscisse de l'autre extrémité que l'on suppose assujettie à rester en repos.

« L'équation aux dérivées partielles qui régit le mouvement est :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^{-m-1} \frac{d^2u}{dx^2},$$

où :

$$a^2 = \frac{mp_0}{\rho_0},$$

p_0 étant la pression initiale et ρ_0 la densité initiale, qui sont les mêmes pour tous les points du fluide.

« Les conditions initiales sont $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$, puisque le gaz est supposé en repos.

« Si M désigne la masse du piston en contact avec l'extrémité $x = 0$, son mouvement est causé uniquement par la pression de la tranche extrême ; les conditions imposées aux extrémités sont :

$$M\frac{d^2u}{dt^2} = -\omega p, \qquad \text{pour} \qquad x = 0$$

et

$$u = 0 \qquad \text{pour} \qquad x = h$$

quel que soit t, ω désignant la section du cylindre.

« Lagrange et Piobert se proposaient de déterminer une intégrale unique de l'équation aux dérivées partielles, satisfaisant aux deux conditions initiales et aux conditions d'extrémité. Or, on a montré que le problème ainsi posé est généralement insoluble ; il est impossible de représenter l'ensemble du phénomène par une seule et unique expression analytique. On ne peut obtenir la solution de la question que par une infinité d'intégrales dont chacune représente le mouvement pendant un certain temps.

« Dès le début, prend naissance, à l'extrémité $x = 0$ une intégrale u, compatible avec le repos et satisfaisant à la condition imposée à cette extrémité. Celle-ci se propage avec une vitesse a et parvient à l'extrémité λ au bout d'un temps $t_1 = \frac{\lambda}{a}$. A cet instant, une autre intégrale u_2 prend naissance à l'extrémité λ ; elle doit satisfaire à la condition imposée à cette extrémité et, de plus, être compatible avec l'intégrale u_1, ce qui suffit pour la déterminer.

« L'intégrale u_2 se propage dans u_1 avec une certaine vitesse, variable d'ailleurs à chaque instant et arrive à l'extrémité $x = o$, à un certain instant t_2, auquel prend naissance, dans la tranche $x = o$, une nouvelle intégrale u_3, compatible avec u_2 et satisfaisant à la condition imposée à l'extrémité $x = o$.

« Des intégrales successives naissent alternativement ainsi aux deux extrémités. Si le tube qui renferme le gaz est indéfini, dans le sens des x négatifs, le piston sera toujours soumis à la pression de la tranche extrême, quel que soit son déplacement. Son mouvement sera donné entre les instants zéro et t_2, par l'intégrale u_1, entre les instants t_2 et t_4 par l'intégrale u_3 et ainsi de suite, mais jamais par les intégrales u_2, u_4 ... qui prennent naissance à l'extrémité $x = \lambda$. Pour déterminer entièrement le mouvement, il faudrait connaître toute la série des intégrales.

« Mais dans le problème d'artillerie que Lagrange et Piobert se proposaient de résoudre, le tube avait une longueur finie, laquelle n'était autre que celle de l'âme du canon.

« Soit L cette longueur. Quand le projectile a parcouru la longueur $L - \lambda$, il se trouve à l'extérieur du tube ; le gaz se répand dans l'atmosphère et la pression exercée à l'arrière du mobile devient rapidement négligeable, de sorte que, en faisant abstraction de la pesanteur et de la résistance de l'air, son mouvement serait sensiblement uniforme.

« Soit $u_{2n} + 1$ l'intégrale qui représente le mouvement du projectile au moment où son déplacement est égal à $L - \lambda$; il est complètement inutile de déterminer les intégrales ultérieures, de sorte que le problème peut être résolu par la détermination d'un nombre fini d'intégrales ».

49. **Période initiale du mouvement.** — D'après ce qui vient d'être dit, l'image que l'on peut se faire de l'état de la masse gazeuse devient très nette. Au contact du culot prend naissance une onde qui se propage vers la culasse et s'y réfléchit. Tant qu'il n'y a pas retour au culot, le mouvement du projectile suit une certaine loi.

Au moment de ce retour, il y a changement de loi du mouvement jusqu'à une nouvelle atteinte après réflexion, et ainsi de suite. Le projectile progressera ainsi, poussé par des sortes d'à-coups séparés par des périodes de stabilité dans les fonctions représentant la force propulsive; le nombre d'à-coups qui atteindront le culot dépend évidemment de 3 éléments : la vitesse de propagation des ébranlements dans la masse gazeuse, le déplacement actuel du projectile, et sa vitesse propre.

La vitesse de propagation d'un ébranlement dans une masse gazeuse a été déterminée expérimentalement par M. Vieille dans des expériences avec une bombe allongée[1].

Cette vitesse serait de 1 200 mètres environ pour les produits de décomposition des poudres B à la température et aux pressions qu'on rencontre dans les bouches à feu. Elle varie d'ailleurs dans le même sens que les pressions et il y a une concordance assez satisfaisante entre le nombre qu'on peut calculer par la théorie de l'élasticité des gaz et celui qui résulte des expériences.

Lorsque le projectile, au commencement de son mouvement, n'aura pas encore acquis une vitesse considérable, il se produira, pendant un court déplacement, un très grand nombre de réflexions sur la culasse et de retours au culot d'ondes ou d'intégrales d'Hugoniot. Le nombre

[1] VIEILLE. 1. p. 179.

des à-coups sera très grand et leur suite constituera, pour ainsi dire, un état continu définissant un certain mode de propulsion (c'est-à-dire une solution particulière des équations différentielles qui peuvent alors se simplifier) tout à fait différent du mode de propulsion par à coups d'intégrales qui sera la loi ultérieure.

Dans la première partie relativement lente du mouvement, l'effet de ce brassage incessant de la masse gazeuse par la réflexion des ondes, rapprochera évidemment la masse de l'homogénéité et on aura ainsi un fonctionnement analogue à celui d'un ressort ou à celui qu'on admet pour une détente adiabatique ordinaire d'un gaz, où toute la masse participe à l'action.

On reconnaît, dans ce qui précède, un problème tout à fait analogue à celui du fonctionnement statique des manomètres à ressort et la solution peut être exprimée par les mêmes termes : il faut que la durée d'une vibration du ressort soit petite par rapport à la durée du déplacement à enregistrer.

Ici, la période vibratoire de la masse gazeuse doit être petite par rapport au chemin parcouru par le projectile pendant sa durée; en d'autres termes, la vitesse v du projectile doit être faible par rapport à la vitesse a de propagation des ondes dans la masse.

Tant que cette condition sera réalisée, le gaz peut être considéré comme fonctionnant à peu près par un déplacement d'ensemble, répondant à une détente adiabatique.

50. **Deuxième période du mouvement.** — Mais, lorsque la vitesse v du projectile deviendra notable, le régime de propulsion par à coups d'intégrales apparaîtra et l'intervalle qui sépare deux à coups augmentera avec v.

D'autre part, la vitesse a de propagation diminuant avec la pression des gaz, il arrivera un moment où aucune intégrale ne pourra plus atteindre le projectile. Celui-ci poussé par la propulsion seule de la dernière tranche en contact avec lui, sans l'intervention désormais impossible des autres tranches gazeuses, tendra vers une vitesse limite dont l'expression est $\frac{2a}{n-1}$ en fonction de la vitesse a de propagation et de l'exposant n de détente adiabatique.

La vitesse limite U que la théorie ordinaire de la détente adiabatique générale des gaz de la charge assigne au projectile est donnée par la formule (46) :

$$U^2 = \frac{2}{n-1}\,\frac{10f\varpi}{m}.$$

Quoique a dépende évidemment des circonstances antérieures du mouvement et par suite de m et de ϖ, il n'est point démontré que les deux limites soient les mêmes. Elles n'ont d'ailleurs qu'un intérêt spéculatif, vu la faible longueur de nos bouches à feu.

Cependant, dans nos canons, le régime des à-coups, indiqué par la théorie, se manifeste certainement, car la vitesse v est tout à fait de l'ordre de grandeur de a et il n'est pas impossible qu'avec nos canons longs, on dépasse la limite de vitesse où aucune intégrale nouvelle, jusqu'à l'infini, ne viendra toucher le culot du projectile.

51. **Le partage de l'énergie de la charge.** — D'après ce qui vient d'être exposé dans les développements précédents, l'énergie cinétique de la charge que l'équation

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{10f\varpi}{n-1}\left(1 - \theta^{n-1}\right)$$

supposait tout entière employée à la propulsion du projectile se partage en réalité en trois parties principales :

1° L'une est représentée par la *force vive actuelle* du projectile $\frac{1}{2}mu^2$;

2° La seconde est représentée par la *force vive de la charge* dont les tranches gazeuses sont animées de vitesses absolues croissant depuis zéro jusqu'à u ;

3° La troisième représente la *force vive* que les ondes d'Hugoniot emmagasinent et qui assure leur propagation. Si on suppose, par exemple, qu'on arrête tout d'un coup le projectile et les gaz de la charge dans leur mouvement absolu, les ondes préexistantes n'en continueraient pas moins leur oscillation indéfinie dans l'âme, avec la force vive qui leur a été communiquée.

Que va devenir alors l'équation du mouvement ? et est-il possible, tout en lui conservant sa forme simple (pour le remplacement de laquelle la théorie est, d'ailleurs, incacapable de fournir la moindre indication puisqu'elle nie même l'existence d'une solution continue) et en maintenant sa signification générale de transformation d'énergie en force vive, est il possible de lui donner une extension suffisante pour tenir compte des phénomènes réels qui viennent d'être examinés ?

On peut le faire, et l'*expérience* montre que les hypothèses supplémentaires suivantes paraissent légitimes.

1° *Force vive de la charge.* — On peut, sans cesser d'être parfaitement rigoureux, considérer que les tranches successives de la charge étant animées de vitesses *absolues* variant de o (fond de la chambre à poudre) à u vitesse du

projectile (au culot), la force vive de la charge ϖ a pour expression

$$\frac{1}{2}\vartheta\frac{\varpi}{g}u^2$$

ϑ étant un coefficient compris entre o et 1.

Au lieu de m, dans la formule du mouvement, on mettra donc

$$\mu=\frac{p+\vartheta\varpi}{g}.$$

Où l'incertitude commence, c'est pour le choix de la valeur la plus convenable qu'il y aurait lieu de prendre pour ϑ, problème insoluble, sans doute, dans toute sa généralité et qu'on ne peut résoudre, avec Piobert, que par des hypothèses peu justifiées. On laissera donc ϑ sous forme symbolique dans la théorie ultérieure.

Dans une étude très récente sur le problème de Lagrange, le général Gossot et l'ingénieur Liouville[1] ont étudié cette même question avec plus de rigueur; ils ont pu démontrer le théorème intéressant que le facteur ϑ est une fonction du seul rapport $\frac{\varpi}{p}$.

2° *Force vive des ondes d'Hugoniot.* — Ici, aucune indication théorique ne permet de fixer un certain coefficient analogue à ϑ dont on connaîtrait deux limites : il faut alors faire appel à l'expérience.

On suppose, ce qui parait rationnel, que la force vive des ondes d'Hugoniot est proportionnelle à la force vive $\frac{1}{2}\mu v^2$, de sorte qu'il y aurait, entre les trois fractions entre

[1] GOSSOT et LIOUVILLE. 3. p. 21.

lesquelles se répartit l'énergie, un rapport de proportionnalité.

Par suite, l'énergie totale de la charge qui est $\frac{10 f\varpi}{n-1}$ aurait produit, au lieu du travail total $\frac{1}{2}\mu U^2$ que l'expérience donnerait, si U_∞ était mesurable, un travail plus grand $\frac{\lambda}{2}\mu U^2$, λ étant > 1. On a ainsi

$$\frac{1}{2}\mu U^2 = \frac{10 f\varpi}{\lambda(n-1)};$$

posons

$$\lambda(n-1) = \gamma - 1$$

d'où

$$\gamma = 1 + \lambda(n-1).$$

L'exposant γ sera l'*exposant de détente expérimentale* qui doit être substitué à l'exposant théorique n, rapport des chaleurs spécifiques, et qui permettra de tenir compte de l'énergie de la charge non convertie en travail mécanique et en même temps d'éliminer l'incertitude qui règne sur la valeur exacte de l'exposant n.

On voit d'ailleurs, d'après la démonstration même, que cet exposant γ sera une véritable *caractéristique* de la détente, c'est-à-dire un nombre qu'une expérience appropriée permettra de déterminer. Il suffira, en effet, de tirer dans une bouche à feu très longue, où la quantité

$$\theta^{\gamma-1} = \left(\frac{c'-\varpi'}{c-\varpi'}\right)^{\gamma-1}$$

sera presque négligeable devant l'unité, une poudre très vive (combustion presque instantanée) et de déterminer la

courbe expérimentale des pressions en fonction des espaces parcourus. Si les expériences répétées dans diverses conditions montrent que l'exposant γ est sensiblement constant, l'équation du mouvement, pour une combustion instantanée, sera justifiée et on pourra, par extension logique, la prendre comme base mi-théorique, mi-expérimentale d'une théorie complète des poudres actuelles. Des expériences de ce genre[1] ont permis de fixer la valeur de γ à un nombre voisin de $1 + \frac{1}{4}$.

52. **Résumé.** — On voit combien la discussion des conditions physiques du problème nous éloigne de penser qu'on puisse déduire les équations différentielles de la Balistique Intérieure de la simple considération des principes ordinaires de la Thermodynamique. Celle-ci ne prête guère à la Balistique que la forme d'une équation dont les lettres ont une signification spéciale, et un sens très élargi. En particulier, l'*exposant de détente* γ a une signification qui donne au mot *détente adiabatique* simplement le sens de *détente, suivant une loi moyenne, d'une poudre instantanément comburée.*

Il nous semble que c'est en fixant ainsi nettement la nature des hypothèses faites, en leur laissant leur caractère de lois expérimentales et enfin en élaguant du problème principal toutes les influences secondaires qu'on peut arriver à donner une base sûre et solide à la Balistique Intérieure.

Moyennant ces hypothèses et ces conventions, la loi du mouvement du projectile par la détente de la poudre,

[1] Ch. 2. — IIIe partie.

supposée complètement réduite en gaz à l'origine (c') du parcours, sera représentée par la formule :

$$u^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \left(1 - \theta^{\gamma - 1}\right)$$

avec

$$\theta = \frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'} = \frac{1 - \Delta'}{\rho - \Delta'}$$

et

$$\mu = \frac{p + \Im\varpi}{g}.$$

Pour une détente indéfinie, c'est-à-dire pour c ou $\rho = \infty$, la vitesse limite est

$$U^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu}.$$

On a donc, pour un point quelconque :

$$u^2 = U^2 \left(1 - \theta^{\gamma - 1}\right).$$

On aura, en plus, pour déterminer la pression P en un point c de l'âme la formule

$$P (c - \varpi')^{\gamma} = f\varpi\, (c' - \varpi')^{\gamma - 1}$$

ou encore

$$P = P'\theta^{\gamma} ;$$

dans cette formule

$$P' = \frac{f\varpi}{c' - \varpi'} = \frac{f\Delta}{1 - \Delta'}.$$

§ 2. Les conséquences de la théorie d'Hugoniot.

53. **La veine gazeuse.** — Ce n'est point seulement à cause de son intérêt propre, ni même à cause de son utilité pour préciser la signification des équations de la Balistique Intérieure, que nous avons donné le sommaire de la théorie d'Hugoniot. Mais c'est que celle ci comporte de nombreuses applications pratiques et qu'elle permet l'explication, par le mécanisme qu'elle indique, de bien des phénomènes considérés jusqu'ici comme très obscurs.

Avant de poursuivre le développement des théories de la Balistique Intérieure, il est donc utile de consacrer quelques pages aux conséquences de la théorie d'Hugoniot; ces conséquences ne paraissent pas, d'ailleurs, avoir été aperçues explicitement par l'éminent mathématicien.

Le mécanisme de la propagation des ondes et de leur réflexion rend impossible de concevoir à la manière d'une pression *statique* l'action des gaz de la poudre dans la bouche à feu. Au lieu de considérer la masse gazeuse comme jouissant de la sorte d'indépendance des volumes élémentaires du fluide qui caractérise une pression statique, agissant avec indifférence dans toutes les orientations, on doit imaginer cette masse comme formant un système ayant une individualité d'ensemble. Les molécules gazeuses y sont dirigées parallèlement à l'axe du canon; elles ont des déplacements d'ensemble et d'autres oscillatoires; il se forme ainsi une véritable *veine* de forme parfaitement déterminée, lentement variable (relativement) avec le temps et à liaison complète. Cette *veine* est parcourue d'un bout à l'autre par des ondes qui en assurent la continuité et la permanence et qui transportent

l'énergie de chaque tranche successive sur le culot, de sorte que toutes participent au travail de propulsion.

Examinons quelles vont être les conséquences résultant de la permanence de cette *veine* gazeuse dans l'âme.

54. **Pression sur la culasse.** — Les diamètres différents de deux tubes, l'*âme rayée* et la *chambre à poudre*, constituent, à un titre égal, les conditions déterminantes de la forme de la veine.

A une certaine distance de part et d'autre du tronc de cône de raccordement, on doit considérer les sections de la veine gazeuse comme égales, respectivement, à σ et à σ' σ étant la section de l'âme rayée et σ' étant la section de la chambre à poudre.

Les propositions suivantes découlent immédiatement de cette considération.



Fig. 19.

1° On n'a pas le droit de dire que les pressions en M et N sur la région annulaire de section $\sigma' - \sigma$ se font équilibre, comme s'il s'agissait de pressions statiques. C'est cependant l'hypothèse que l'on fait d'ordinaire dans tous les calculs de Balistique Intérieure ou de résistance des bouches à feu; elle est admise en particulier dans le mémoire de MM. Sébert et Hugoniot [1].

2° Si la *veine* était homogène dans toute sa section et si un crusher indiquait, en un point de la culasse, la pression P_M par centimètre carré, la pression maximum totale, sur la culasse, serait $P_M\sigma'$ et non $P_M\sigma$, comme on le compte ordinairement.

[1] Sébert et Hugoniot, p. 117.

3° Mais la *veine* ne peut être homogène dans toute une tranche verticale; le changement de section d'une part, le frottement des parois et l'action des rayures de l'autre, y créent des états différents dans une même tranche. La densité doit augmenter quand on se rapproche de l'axe. Ainsi donc, la *pression totale* sur la culasse donnée par un crusher serait comprise entre $P_M \sigma'$ et $P_M \sigma$.

4° Des *crushers* placés sur la culasse en différents points ne donneront pas la même pression maximum, à cause de la non homogénéité de la *veine*. L'action des rayures peut en outre produire une déviation latérale de son axe.

5° Le *vélocimètre* qui totalise les efforts réellement exercés sur la culasse donnera toujours une pression supérieure à celle que fournissent les crushers placés à la culasse si on multiplie les pressions données par ceux-ci par la section σ.

6° Le chambrage ou rapport $\frac{\sigma'}{\sigma}$ détermine une perte de force vive de la charge due au raccordement des deux tubes de sections inégales qui constituent le canon.

7° Si on diminue le chambrage en conservant même volume de chargement et même charge de poudre, on ne change pas la pression totale à la culasse. Mais la pression qu'accuserait un crusher sera plus considérable : la mesure des pressions au vélocimètre rétablirait l'égalité.

8° Il résulte de ces faits que le chambrage d'une bouche à feu constitue, eu égard aux pressions mesurées, un véritable *trompe l'œil* qui permet, en *apparence,* aux canons ainsi disposés, d'obtenir de fortes vitesses avec des pressions modérées. Par contre, si on fait état de ces pressions pour

le calcul de l'effort total exercé sur la culasse, en les multipliant par la section droite de l'âme rayée σ, on peut s'exposer à de graves accidents de l'arrière du canon (déculassement, dérivage, etc.).

55. **La sortie du projectile à la bouche du canon.** — Suivons maintenant la *veine* gazeuse jusqu'à l'extrémité de la volée du canon.

Des phénomènes aérodynamiques très curieux accompagnent la sortie du projectile de l'âme. L'étude expérimentale qui était restée inabordée jusqu'à ce jour, a été entreprise récemment par la Commission de Gâvre et des résultats très remarquables ont été obtenus.

Voici comment il semble qu'on puisse analyser le phénomène dans ses grandes lignes.

a) Admettons que le forcement de la ceinture crée un joint absolument étanche aux gaz de la poudre. Le projectile se mettant en mouvement, l'*onde aérienne* qui naît dans le tube à l'AV du projectile va jusqu'à la bouche et là se réfléchit avec changement de signe de la dilatation, tandis que d'autre part elle ébranle l'atmosphère extérieure sur une demi sphère qui aura un rayon aT au moment de la sortie du projectile (a vitesse du son, T durée de trajet du projectile dans l'âme). Tout l'intérieur de cette demi-sphère aura été ébranlé lorsque le projectile parviendra à la bouche ; et d'ailleurs, l'air y sera partagé en ondes dilatées et comprimées alternatives, puisque tel aura été aussi l'état de l'âme du canon.

Cette demi-sphère sera limitée en arrière par un plan vertical passant par la bouche du canon. Ce plan sera courbé par le recul du canon et deviendra, par suite, une surface convexe du côté de la culasse.

b) En plus de cette région agitée, qui appartient à l'atmosphère extérieure, un *jet d'air* sortira de la bouche, poussé par le projectile et formant une espèce de cône se raccordant à l'avant avec la région ébranlée précédente.

c) Au moment où l'avant du projectile franchira la tranche de la bouche, l'*onde de tête* du champ acoustique de ce projectile se formera aux dépens, pour ainsi dire, du jet d'air expulsé et se terminera, à l'arrière, par une surface courbe pp' correspondant à la partie arrière du jet d'air et qui restera stationnaire à la bouche du canon en se développant de plus en plus.

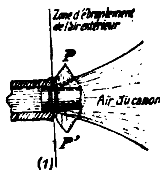
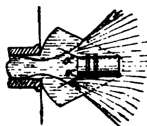


Fig. 20.

d) Lorsque l'arrière du projectile franchira la bouche, la veine gazeuse des gaz de la poudre sortira avec un angle sensiblement égal à celui du jet de l'air expulsé, car la vitesse des tranches de l'air à l'avant du projectile et des gaz de la poudre à l'arrière sont les mêmes. Les conditions aux limites ne seront donc pas changées brusquement, car une toute petite portion des gaz de la charge sera en dehors du culot du projectile et la permanence de forme et la continuité de la veine gazeuse se maintiendront.


Fig. 21.

La veine gazeuse sera limitée à l'avant par l'*onde d'arrière* du projectile $\alpha\alpha$; elle ne précédera pas le projectile.

C'est cette zône $\alpha\alpha$ qui sera l'origine des tourbillons et du mouvement tumultueux des fumées qui formeront devant la bouche un nuage opaque susceptible de masquer, plus ou moins complètement, la régularité des ondes qui se produisent.

56. **Sur la relation entre la vitesse initiale et la vitesse de recul.** — D'après ce qui vient d'être expliqué, il y a lieu de considérer comme inexacte l'opinion souvent exprimée et qu'on trouve d'ailleurs dans le mémoire de de MM. Sébert et Hugoniot « que, après la sortie de « l'âme, les produits de la combustion, animés d'une vi- « tesse supérieure à celle du projectile, doivent bientôt le « dépasser et l'entourer, de sorte que le mobile marche « pendant un certain temps, dans un milieu lui-même en « mouvement et que sa vitesse peut continuer à croître « après la sortie du projectile [1] ».

Ce dernier fait est bien exact et résulte de ce qu'il n'y a pas de discontinuité dans l'action des gaz de la poudre sur le projectile au moment de la sortie de celui-ci. C'est ce que prouvent d'ailleurs les tracés du *vélocimètre* ou du *manomètre à ressort* qui présentent des courbes bien continues.

Mais l'opinion que les gaz de la poudre prendraient une énorme vitesse à la sortie de l'âme, provient, semble-t-il, d'une application défectueuse du théorème des quantités de mouvement.

Considérant la vitesse initiale V_0 du projectile de masse m et la vitesse v'_0 du canon de masse M à cet instant, on aura :

$$Mv'_0 - mV_0 = \left(\frac{\varpi}{g}\right)v$$

v étant la vitesse moyenne des gaz de la charge qui peut, approximativement, être prise égale à $\frac{V_0}{2}$.

[1] SEBERT et HUGONIOT, page 139.

Mais, on suppose que cette relation est encore applicable quand on remplace la vitesse v'_0 du canon par la vitesse maximum V' de recul que prend la bouche à feu et que donne le vélocimètre. Pour cela, on fait l'hypothèse que V_0 (du projectile) ne varie pas beaucoup, ce qui est vrai et que $\left(\frac{\varpi}{g}\right)$ ne varie pas, ce qui est faux. Car, si toute la masse des gaz continuait à agir sur le projectile, V_0 augmenterait de même que V'; il n'en est pas ainsi : le projectile échappe bientôt complètement à l'action des gaz de la poudre, tandis que le canon y est soumis jusqu'au moment où la pression dans l'âme est devenue la pression atmosphérique; mais la partie de $\frac{\varpi}{g}$ qui n'agit plus sur le projectile, agit sur l'atmosphère extérieure et met en mouvement une certaine masse λ d'air animée d'une vitesse moyenne z de sorte que le théorème complet s'écrirait :

$$MV' - mV_0 = \left(\frac{\varpi}{g}\right) u + \lambda z.$$

La relation $MV' = mV_0 + K\varpi$ qui est quelquefois employée pour le calcul de la vitesse maximum V' de recul des bouches à feu ne peut donc être considérée que comme purement empirique. En particulier, le nombre K qui y figure ne représente, à aucun titre, la vitesse que prennent les gaz de la charge à la sortie du projectile.

§ 3. — Usure des bouches a feu

57. **Théorie actuellement admise.** — Comme conséquence directe des phénomènes analysés dans les § pré-

cédents, nous entreprendrons maintenant l'explication du phénomène expérimental dit « usure des canons ».

Les bouches à feu s'usent d'abord dans une région qui avoisine l'origine des rayures. C'est la dégradation de cette partie de l'âme, qui, amenant une diminution progressive des qualités balistiques de la bouche à feu, limite le nombre des coups que l'on peut faire tirer à la pièce ; celle-ci se trouve ainsi condamnée bien avant que sa résistance propre ne soit compromise.

Il existe une théorie classique du phénomène de l'usure des bouches à feu, à l'origine des rayures. Comme point de départ de cette théorie, on admet qu'un défaut d'obturation existe dans le voisinage de l'origine du mouvement, entre la ceinture du projectile et la paroi du canon gonflée par la pression maximum ; les gaz à haute pression peuvent donc passer par l'interstice en forme de croissant ainsi formé. Ce courant gazeux crée des érosions qui vont s'agrandissant, et qui sont limitées aux régions où la pression est la plus considérable.

Une telle explication paraît condamner d'avance toute tentative pour supprimer ou atténuer cette usure, qui apparaît ainsi comme le mal nécessaire qui fait périr tous les canons.

Les travaux les plus importants et les plus complets sur la question sont dus au colonel Lanfroy « Sur la cause des érosions dans l'âme des bouches à feu », et de M. Vieille « Etude sur les phénomènes d'érosion produits par les explosifs[1] ».

Pour l'exposé de la doctrine actuelle, il importe de citer les lignes suivantes de M. Vieille.

[1] Vieille, 4.

58. **Caractère des érosions balistiques d'après M. Vieille.** — « Il convient tout d'abord de préciser la nature du phénomène qu'il s'agit de reproduire.

« Les érosions produites sur la surface interne des bouches à feu s'observent soit en coupant l'arme par un plan diamétral, soit au moyen de moulages à la gutta-percha ou au plâtre. Ces érosions sont généralement localisées au voisinage de la naissance des rayures et s'étendent aux régions parcourues par le projectile avec une faible vitesse et sous les pressions les plus intenses.

« Le point de départ de ces érosions paraît être un réseau de fines craquelures qui tapissent la chambre aux environs du tronc de cône de raccordement avec l'âme. La profondeur et la largeur des craquelures prallèles à l'axe du canon vont croissant avec le nombre des coups et leur réunion forme la nouvelle surface de l'âme sur laquelle émergent un réseau d'ilôts en saillie qui constituent comme les témoins de la surface primitive érodée par les gaz.



Fig. 22.

« Les photographies mettent bien en évidence le double système de lignes craquelées du côté de la chambre et la prédo-

minance des stries parallèles à l'axe du côté des rayures (voir fig. 22).

« L'origine du réseau des craquelures primitives peut être diversement expliquée ; il me paraît qu'elle peut être rapprochée de la cémentation superficielle et de la trempe intense que prennent les surfaces d'acier doux soumises à l'action des gaz carburés provenant de la décomposition des explosifs. Cette action s'observe constamment dans les expériences en vase clos. La mince pellicule aciérée et trempée semble devoir se craqueler facilement sous l'action des tensions considérables et des flambages auxquels elle est soumise dans les bouches à feu et cette première phase du phénomène qui donne un quadrillage régulier serait tout à fait indépendante des fuites gazeuses qui n'agiraient que pour en accentuer les éléments parallèles à l'axe.

« Ces fuites paraissent dues au défaut d'obturation de la ceinture qui ne peut se mouler dans les fines craquelures dont il vient d'être question ; les gaz tendent alors à s'écouler par ces interstices, de la chambre à poudre au dehors, avec des vitesses incomparablement plus grandes que celle du projectile. Les craquelures parallèles à l'axe constituent le chemin le plus direct suivi par le gaz et ce sont, en effet, celles qui, d'après l'observation, subissent le plus rapide accroissement. Le phénomène de fuite gazeuse est d'ailleurs très court et ne subsiste en un point que pendant la durée du passage de la ceinture ; il doit donc être d'autant plus énergique que la vitesse du projectile est plus faible et la pression plus considérable, et c'est pour cela que les érosions se trouvent localisées sur un à deux calibres de parcours à partir de l'origine des rayures. Au delà, la vitesse du projectile est trop grande et la pression trop réduite pour assurer, à travers de très petits orifices, un débit gazeux à haute température capable de produire des effets mécaniques appréciables.

« Quoi qu'il en soit de cette explication, il est certain que le phénomène des érosions ne peut être attribué à l'action de tourbillons gazeux accompagnant la déflagration puisqu'on ne l'observe ni en vase clos ni dans la partie de la chambre à poudre voisine de la culasse ; le phénomène ne résulte pas

non plus du contact de la paroi avec des gaz animés des plus fortes vitesses atteintes par le projectile puisque les érosions sont nulles jusqu'au voisinage immédiat de la bouche où des fuites gazeuses directes peuvent de nouveau se produire par défaut d'obturation au moment de la sortie du projectile.

« Le phénomène qui vient d'être décrit constitue le phénomène d'érosion normal et constant.

« Sur ce phénomène viennent parfois se greffer des altérations de la paroi très importantes localisées en certains points et provenant vraisemblablement de quelque défaut présenté à l'origine par la surface de l'arme ou d'une imperfection locale de l'obturation par la ceinture; on voit apparaître en ces points, irrégulièrement disposés, des érosions profondes pouvant atteindre par la réitération des tirs, plusieurs millimètres de profondeur.

« L'expérience a montré que ces accidents secondaires pouvaient être évités par un tracé convenable des ceintures, tandis que l'érosion normale définie plus haut reste, jusqu'à nouvel ordre, une conséquence forcée du tir prolongé.

« En résumé, c'est donc à l'action réitérée d'une veine gazeuse à haute température s'écoulant librement au dehors par un très petit orifice que l'on doit rapporter les phénomènes de l'érosion ».

59. **Objections contre la théorie usuelle.** — L'explication de la cause de l'usure des bouches à feu, qui vient d'être rappelée, peut donner prise à de très nombreuses objections ; nous nous proposons d'examiner les principales.

1° La théorie de l'agrandissement de l'âme, qui permet le passage des gaz à très haute pression entre la ceinture du projectile et les parois du canon suppose (ainsi que l'expose M. Vieille et qu'il est nécessaire de l'admettre pour rendre compte de la localisation des dégradations) que la dilatation du canon est maximum pour une position du culot assez voisine de la position de chargement;

c'est à cette position que correspondrait la pression maximum.

Voici, par exemple, la figure extraite du Mémoire du colonel Lanfroy qui donne la courbe des pressions et la courbe des déformations corrélatives de l'âme. Le point où se produit la pression maximum serait à environ un demi calibre de la position de chargement.

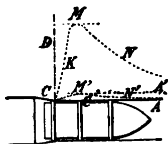


Fig. 23.

Mais, il est impossible d'admettre, actuellement, que la pression maximum se produise en un point aussi rapproché de la chambre à poudre : les tracés du vélocimètre et du manomètre à ressort, le calcul, s'accordent pour reporter à 5 ou 6 calibres et quelquefois plus de la position de chargement la région de la pression maximum.

Dans la région des érosions, au contraire, la pression des gaz de la poudre est relativement faible et rien ne démontre que le joint libre entre la ceinture et la paroi du canon, s'il existe, puisse être maximum en cet endroit.

2° Si la cause des érosions était l'écoulement des gaz de la charge par les interstices libres entre la ceinture et la paroi, elles se produiraient tout le long de l'âme ; car, par suite de l'attaque progressive des cloisons, il existe un intervalle vide, de largeur croissante, entre le flanc non portant de la cloison du canon et le flanc non portant de l'empreinte sur la ceinture.

Or, les gaz de la poudre trouveraient là un orifice d'échappement naturel, et non seulement ils produiraient des érosions sur la bouche à feu, mais ils laisseraient des traces analogues sur les ceintures elles-mêmes dont le métal est plus attaquable que l'acier aux actions de ce

genre, et qui, pendant tout le parcours dans l'âme seraient soumises, au même point, au passage des gaz.

3° La production d'érosions vers l'arrière et leur propagation dans ce sens restent inexplicables. Si ce sont ces craquelures, qui, ainsi que le dit M. Vieille, précèdent l'érosion à l'origine des rayures et la provoquent, pour ainsi dire, comment ne se produisent-elles pas dans toute la longueur de la chambre à poudre et pourquoi sont-elles localisées au cône de raccordement ?

4° Le caractère érosif des dégradations de l'âme n'est point nettement marqué ; on sait pourtant combien caractéristique est le facies d'une érosion, sur l'obturateur par exemple, où on distingue une sorte de cratère, avec traces évidentes de fusion sur le pourtour. Dans les affouillements constatés à l'origine des rayures, rien de tel ne se produit ; ce sont des amorces de fissures sans caractère érosif à proprement parler.

5° Lorsqu'une érosion, aussi petite soit-elle, s'est produite, elle grandit, aux coups suivants, dans des proportions qui rendent la continuation du tir impossible. Comme d'un coup à l'autre, la position relative de la ceinture et de la paroi reste identique, une amorce d'érosion produite par une cause quelconque se trouverait toujours soumise à des efforts semblables, et elle donnerait naissance à un sillon érosif unique, s'accroissant avec une extrême rapidité. On ne constaterait point cette sorte d'attaque d'ensemble presque uniforme, sans localisation nette, qui est le caractère de l'usure des bouches à feu.

60. **Théorie nouvelle** — 1° Au paragraphe précédent nous avons assimilé l'état de la masse gazeuze dans l'âme

du canon à celui d'une veine fluide présentant une continuité parfaite et une permanence de forme tout à fait différente de l'agitation tourbillonnaire et de l'état statique (en moyenne) que l'on y suppose le plus souvent. Cette conception permet, comme conséquence immédiate, d'expliquer les phénomènes dits d'*érosion* dans les bouches à feu, à l'origine des rayures.

C'est qu'en effet, cette région présente un caractère tout à fait différent des autres au point de vue hydrodynamique. On sait qu'à un élargissement subit du lit d'un courant fluide (canal ou tuyau), correspondent des phénomènes caractéristiques qu'on désigne dans l'hydraulique sous le nom d'*étranglement* de la veine fluide.

La nécessité de ce phénomène apparaît d'ailleurs comme une conséquence de la continuité même de l'écoulement : entre deux tuyaux de dimensions différentes, parcourus par le même courant gazeux, le raccordement du fluide ne s'établira pas, en général, suivant le profil solide qui relie les 2 portions du tube, mais suivant une surface Σ dont la forme est fonction des propriétés du fluide et est assujettie, comme conditions aux limites, à venir toucher tangentiellement les deux tubes-parois S_1 et S.



Fig. 24.

Dans le cas d'un régime permanent d'écoulement, le problème de l'ajutage rationnel, épousant la forme contractée de la veine, admet une solution ; mais dans le cas du courant gazeux de la bouche à feu, la variation incessante des conditions amènera un changement continu dans le profil de la surface Σ qui ne peut qu'exceptionnellement et pour un instant, coïncider avec un profil solide déterminé.

2° D'après cette explication, il existerait dans la région du raccordement à l'origine des rayures, entre les parois

du canon et la surface Σ de la veine gazeuse, un ou plusieurs espaces annulaires, communiquant ou non entre eux et, dans cette région, les parois de la pièce ne sont pas léchées par le courant gazeux.

On sait que, dans le cas ordinaire que traite l'hydraulique, on démontre que la pression dans cet espace annulaire est tout à fait différente de celle de la veine elle-même et qu'on peut même la mettre parfois en communication constante avec l'atmosphère extérieure sans que rien soit changé aux conditions de l'écoulement.

L'état des gaz de la charge, en cette région annulaire, est donc totalement différent de ce qu'il est partout ailleurs; au lieu du mouvement d'entraînement avec oscillation que nous avons décrit plus haut comme caractérisant l'état de la veine gazeuse, il existe, dans la région considérée, une grande stabilité et un repos relatif si on considère l'état moyen du fluide ; mais, de même que c'est aux coudes et aux élargissements et étranglements du lit que, dans un cours d'eau,. prennent naissance les remous et tourbillons, producteurs d'érosions et rongeurs de rives, de même dans le cas de la bouche à feu, les particules gazeuzes qui viendront se loger dans l'espace annulaire pour y faire varier progressivement la pression statique qui y règne, y pénètreront animées de vitesses considérables qui se convertiront en tourbillons et en remous violents.

C'est la permanence d'un état *statique*, qui permet aux gaz de la poudre d'échauffer davantage cette portion du canon ; c'est la formation de ces tourbillons, conséquence de l'étranglement de la veine, qui localise aux environs du cône de raccordement l'usure du canon. Et, il ne s'y produira point d'érosion à proprement parler, mais un effet bien plutôt analogue à un décapage dû à un jet de sable

tourbillonnant qui viendrait attaquer tout d'abord les surfaces de moindre résistance et ferait apparaître les défauts locaux du métal.

3° Le quadrillage qu'on obtient est bien caractéristique et met en évidence :

a) Les passes successives de l'outil qui a alésé la chambre et le cône de raccordement par un travail circonférentiel.

b) Les broutements du même outil dans le sens axial ;

c) Dans la théorie classique, on explique le fait toujours constaté que les dégradations sont plus considérables à la partie supérieure de l'âme qu'à la partie inférieure parce que le poids du projectile l'applique sur la paroi inférieure et qu'ainsi l'interstice qui donne passage aux gaz ne se forme qu'à la partie supérieure. Dans la théorie nouvelle, la distribution de la charge à la partie inférieure et son étalement le long de la génératrice la plus basse, lors de l'avancement du projectile, permettent d'expliquer facilement la protection relative dont jouit la partie inférieure de l'âme relativement à la partie supérieure.

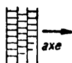


Fig. 25.

d) Enfin, à la bouche du canon, les mêmes phénomènes se passent ; il y a une veine étranglée et une zône annulaire où se produisent des tourbillons et où, par suite, naissent des phénomènes analogues à ceux qui se passent à l'origine des rayures ; mais la différence des pressions qui s'exercent aux deux endroits, et la durée différente de leur action expliquent assez la différence d'intensité que l'on constate dans leurs effets [1].

[1] On peut remarquer qu'une théorie toute récente attribue l'usure des *Turbines à vapeur* à des phénomènes de même genre. Dalimont, p. 217.

61. **Vérifications expérimentales.** — La vérification *a postériori*, de la théorie de l'usure qui vient d'être exposée résultera de la comparaison des dégradations dans l'âme des canons tirant à peu près dans les mêmes conditions de chargement, mais qui sont tracés avec chambrage différent.

Cette vérification confirme nettement l'influence fâcheuse du chambrage sur la conservation des bouches à feu [1].

62. **Résumé.** — D'après ce qui vient d'être exposé dans ce paragraphe, il y a lieu de considérer l'usure des canons, en tant que localisée à l'origine des rayures, non comme un phénomène nécessaire, mais comme une conséquence d'un mode spécial de construction des bouches à feu.

1° On diminuera très notablement l'usure des bouches à feu en réduisant le *chambrage* $\frac{\sigma'}{\sigma}$, au minimum.

2° Le tracé du cône de raccordement, pour un canon de chambrage donné, n'a pas d'influence notable sur l'usure.

3° Nous avons dit précédemment (54) quels étaient les autres inconvénients du chambrage, *perte d'énergie* et *fausse sécurité* des culasses.

D'autre part, un faible chambrage conduit, pour obtenir une même vitesse initiale, à une chambre plus longue; les munitions doivent donc être plus allongées, le chargement peut être rendu un peu plus difficile, et, enfin l'amorçage doit être assuré avec une énergie un peu plus grande. Il y a donc là quelques questions d'ordre pratique qui doivent entrer en ligne de compte lors du dessin des dispositions intérieures de la bouche à feu.

[1] Ch. 2. p. 32.

CHAPITRE IV

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA PYRODYNAMIQUE

§ I. — Les problèmes secondaires du projectile

63. **Problème principal et problèmes secondaires.** — Le phénomène principal de la propulsion du projectile par les gaz de la poudre, tel qu'il a été analysé au chapitre précédent, est accompagné d'un certain nombre de phénomènes accessoires qui en modifient un peu les circonstances. Ils sont, en général, d'une nature telle qu'ils ne produiront sur la solution numérique du problème principal que des erreurs assez petites, de sorte qu'on peut les négliger, en première approximation, tout au moins. Leur influence sera surtout mise en évidence dans des expériences comparatives spéciales où, seul, variera l'élément secondaire dont on fera l'étude. Mais la théorie générale du mouvement du projectile dans l'âme ne pourra s'établir qu'en faisant abstraction de ces éléments secondaires, et en en tenant compte, en gros, par l'introduction, dans la solution finale, de coefficients numériques spéciaux dont on demandera la valeur moyenne à l'expérience.

Les formules, en effet, pour être générales, doivent laisser de côté une foule de circonstances accessoires, qui, toutes, ont, cependant, leur importance et modifient quelque peu les vitesses et les pressions ; on s'attache ainsi à donner seulement une représentation d'ensemble du phé-

nomène sans chercher à tenir compte, dans cette théorie générale, d'une manière détaillée, de toutes les circonstances secondaires qui l'accompagnent nécessairement.

Parmi les causes d'écart, qui, à priori, peuvent être signalées, citons le *diamètre de la gargousse*, la disposition *en vrac* ou *en fagot* des brins de poudre, le *montage* du projectile, le nombre, le tracé et le profil des *rayures*, la forme de la *chambre à poudre*, le poids de la charge d'*amorçage*, l'*usure* du canon, la *saison*, l'*état atmosphérique*, l'*âge des poudres*, etc. Ce n'est que par une étude suivie et minutieuse des poudres, aidée au besoin de quelques expériences systématiques, qu'on pourra arriver, à la longue, à préciser l'influence séparée de chacune de ces perturbations.

A l'heure actuelle et dans l'ignorance où on est de l'action de tous ces éléments secondaires du chargement, on doit en faire abstraction en première approximation, tout au moins, et les considérer comme des erreurs accidentelles dans l'ensemble des phénomènes dont on se propose d'établir la théorie. En supposant que l'on soit en possession des formules rigoureusement exactes de la Balistique Intérieure, ces formules générales ne s'appliqueraient ainsi qu'à des conditions moyennes et des écarts n'en subsisteraient pas moins entre le calcul et l'expérience.

De là, la séparation soigneusement faite, dans cet ouvrage, entre le *terme principal* et les *termes secondaires* de la série qui représente la solution complète du problème de la Pyrodynamique.

Les *termes secondaires* du problème de la Balistique Intérieure se rapportent aux quatre objets que cette science met en présence, à savoir le *projectile*, le *canon*, la *charge*

et l'*atmosphère*. Nous passerons successivement en revue leur influence.

64. **Les termes secondaires du projectile.** — La rotation des projectiles oblongs, nécessaire pour assurer leur stabilité dans l'air, est obtenue par le guidage de *rayures* qui pénètrent dans la *ceinture* ou la *chemise* en métal mou dont est muni le boulet.

Trois termes secondaires s'introduisent dans le problème pyrodynamique du fait de ce dispositif :

1° la *force vive de rotation* imprimée au projectile, qui absorbe une certaine portion de l'énergie de la charge ;

2° le *frottement des cloisons* sur la ceinture qui constitue une résistance passive à vaincre tout le long du trajet ;

3° enfin, avant que les cloisons n'aient frayé leur passage dans la ceinture, le *forcement au départ*, suivi, lorsqu'il est vaincu, par le démarrage brusque du projectile.

Nous étudierons d'abord les deux premiers termes en analysant le phénomène de la marche du projectile dans l'âme.

65. **De l'action des rayures.** — Le projectile, pendant son trajet dans l'âme, se présente, vu de l'arrière, comme dans la figure ci-dessous. La *cloison* c use le *flanc de tir* f de la ceinture, en produisant la rotation du projectile qui tourne ici de droite à gauche. Sur les autres faces, le frottement peut être considéré comme nul, l'empreinte des cloisons ayant été faite préalablement par le *forcement au départ*. On suppose que le flanc de tir f passe par le centre o de l'âme.



Fig. 26.

Soient q le nombre de rayures,

p_n la pression normale au flanc de tir, qui s'exerce au point M,

p_t la pression tangentielle.

Suivant les lois ordinaires du frottement, on admet qu'il y a un rapport constant entre les pressions p_t et p_n et, par suite, qu'on a :

$$p_t = \nu p_n,$$

ν étant un *coefficient de frottement*, à déterminer par expérience.

Soit θ l'inclinaison des rayures au point M.

La résultante R des réactions sur l'axe du canon sera alors :



$$R = q p_n (\sin \theta + \nu \cos \theta),$$

Fig. 27.

et le moment résultant $\mathfrak{M}$ par rapport à cet axe :

$$\mathfrak{M} = q \frac{a}{2} p_n (\cos \theta - \nu \sin \theta),$$

a étant le diamètre du tube.

On a d'ailleurs, pour l'équation du mouvement de translation, en désignant par P la pression au culot par centimètre carré :

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{\pi a^2}{4} P - R.$$

Si ρ est le *rayon de giration* du projectile, on aura, pour le mouvement de rotation, l'équation :

$$m \rho^2 \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}$$

ω étant la vitesse angulaire de rotation.

Entre ω, v, a, θ existe d'ailleurs la relation :

$$\omega = 2\frac{a}{v}\operatorname{tg}\theta.$$

On a donc :

$$\frac{2}{a}m\rho^2 \operatorname{tg}\theta\frac{dv}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Eliminons $\mathfrak{M}$ et $m\frac{dv}{dt}$ entre ces différentes relations, on aura :

$$R = qp_n(\sin\theta + \nu\cos\theta),$$

$$\left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \operatorname{tg}\theta\left(\frac{\pi a^2}{4}P - R\right) = qp_n(\cos\theta - \nu\sin\theta),$$

et enfin :

$$R\left[\cos\theta - \nu\sin\theta + \left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \operatorname{tg}\theta\,(\sin\theta + \nu\cos\theta)\right] = \left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \frac{\pi a^2}{4}P\operatorname{tg}\theta\,(\sin\theta + \nu\cos\theta),$$

et

$$\left[\cos\theta - \nu\sin\theta + \left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \operatorname{tg}\theta\,(\sin\theta + \nu\cos\theta)\right]qp_n = \left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \frac{\pi a^2}{4}P\operatorname{tg}\theta.$$

Mais, à cause de la petitesse de l'inclinaison θ, on pourra négliger θ devant l'unité et écrire simplement :

$$R = \left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \frac{\pi a^2}{4}P\operatorname{tg}\theta\,(\operatorname{tg}\theta + \nu),$$

et

$$qp_n = \left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \frac{\pi a^2}{4}P\operatorname{tg}\theta.$$

Ainsi donc, l'équation du mouvement longitudinal sera :

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{\pi a^2}{4}P - R = \frac{\pi a^2}{4}P\left[1 - \left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \operatorname{tg}\theta\,(\operatorname{tg}\theta + \nu)\right]$$

ou encore, à cause de la petitesse de $\operatorname{tg}\theta$:

$$m\left[1 + \left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \operatorname{tg}\theta\,(\operatorname{tg}\theta + \nu)\right] = \frac{\pi a^2}{4}P.$$

Ainsi qu'on le voit, l'action des rayures sur le mouvement du projectile introduira, comme terme secondaire, un facteur plus grand que l'unité, qui viendra multiplier la masse du projectile.

Ce facteur se compose de deux termes : 1° le terme $m\left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2\theta$ qui est la *force vive de rotation* du projectile, 2° le terme $m\left(\frac{2\rho}{a}\right)^2 \nu \operatorname{tg}\theta$ qui est le *frottement* dû à cette rotation.

Si on prend un projectile cylindrique homogène, on trouve

$$\rho = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

pour valeur du rayon de giration. D'autre part, adoptons pour ν la valeur 0,167[1]. On peut dresser le tableau

[1] HŒSEN. p. 133. Le nombre 0,167 est celui qu'on trouve dans les aide-mémoire de mécanique comme coefficient de frottement. Mais ici, il y a non seulement frottement, mais *usure* du métal de la ceinture ; il est donc vraisemblable que la valeur 0,167 est inférieure à la valeur réelle.

suivant pour différentes valeurs de θ comme expression du terme

$$I = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}\theta(\operatorname{tg}\theta + \nu),$$

auquel se réduit, dans ce cas, le multiplicateur de m.

$\theta =$	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
$I =$	1	1,002	1,004	1,006	1,008	1,011	1,014	1,018	1,022	1,026	1,030

L'expérience peut mettre en évidence, entre deux projectiles de même poids, tirés dans des conditions identiques et ne différant que par le rayon de giration ρ, l'influence du multiplicateur de m.

Ainsi, on trouve[1], que le *boulet cylindrique* a une vitesse initiale plus grande que l'*obus en fonte*; l'*obus en acier*, une vitesse plus grande que l'*obus ordinaire*, etc.

66. **Le tracé des rayures.** — 1° Les rayures *progressives*, c'est-à-dire celles qui, se terminant à la bouche de la pièce avec une inclinaison θ déterminée à l'avance pour assurer la stabilité du projectile dans l'air, sont tracées tout le long de l'âme de manière à rendre minimum l'effort qui s'exerce à chaque instant sur la ceinture et les cloisons, paraissent, *à priori*, les plus satisfaisantes.

A cet effet, il est naturel de rechercher le tracé d'une rayure assurant au projectile une accélération de rotation constante, c'est-à-dire une pression constante de la rayure sur le flanc de tir.

2° Soit le cylindre de l'âme développé et OA une rayure ayant son origine en O, position initiale du projectile; Ox est la génératrice de l'âme partant du même point C.

[1] Ch. 2. p. 43.

Un point qui parcourt la courbe OA a, pour accélération de translation $\frac{d^2x}{dt^2}$ et pour accélération de rotation $\frac{d^2y}{dt^2}$.

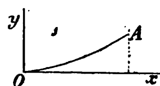


Fig. 28.

Cette dernière devant être, par hypothèse, une constante k, on aura :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k; \qquad \frac{dy}{dt} = kt; \qquad y = \frac{kt^2}{2}$$

avec des constantes nulles puisque l'origine des axes coïncide avec celle du mouvement.

3° Supposons connue la loi du mouvement de translation sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = v = f(c, c')$$

c' étant le volume de la chambre à poudre et c le volume de l'âme en arrière du projectile.

On aura :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{kt}{f(c, c')} = \frac{\sqrt{2ky}}{f(c,c')}$$

d'où :

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{2k}\,\frac{dx}{f(c, c')};$$

mais, on a (45) :

$$\frac{\pi a^2}{4} dx = 10\, dc \qquad \text{ou} \qquad \sigma dx = 10\, dc$$

En intégrant, il vient ;

$$y = \frac{k}{2}\left(\frac{10}{\sigma}\right)^2 \left[\int_{c'}^{c} \frac{dc}{f(c, c')}\right]^2$$

Posons :

$$F(c, c') = \int_{c'}^{c} \frac{dc}{f(c, c')}$$

on aura :

$$y = \frac{k}{2}\left(\frac{10}{\sigma}\right)^2 F^2(c, c').$$

Pour l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ au point x, y, il viendra par suite :

$$\frac{dy}{dx} = k\,\frac{10}{\sigma}\,\frac{F(c, c')}{f(c, c')}.$$

Les valeurs finales qui correspondent au point A étant C, Y et θ on a :

$$\operatorname{tg}\theta = k\,\frac{10}{\sigma}\,\frac{F(C, c')}{f(C, c')}$$

d'où on déduit k, qu'on portera dans la valeur de y : celle-ci devient ainsi :

$$y = \frac{10}{2\sigma}\operatorname{tg}\theta\,\frac{f(C, c')}{F(C, c')}\,F^2(c, c').$$

Telle est l'équation de la courbe, relation entre les ordonnées y et les valeurs successives de c, volume de l'âme.

4° Supposons la combustion de la poudre instantanée (45), auquel cas on aura :

$$\frac{1}{2}\mu u^2 = 10\,\frac{f\varpi}{n-1}\left[1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{n-1}\right]$$

d'où :

$$u = H\left[1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{2}} = f(c, c')$$

en posant :

$$H^2 = \frac{20 f\varpi}{n - 1\,\mu}.$$

On aura donc à effectuer l'intégration de :

$$F(c, c') = \frac{1}{H}\int_{c'}^{c} \frac{dc}{\left[1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Posons :

$$\left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{n-1} = \cos^2 \psi$$

On en déduit :

$$\left[1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{2}} = \sin \psi$$

et

$$dc = \frac{2}{n - 1} (c' - \varpi') \frac{\sin \psi \, d\psi}{\cos^{\frac{n+1}{n-1}} \psi}.$$

On aura ainsi :

$$F(c, c') = \frac{2}{n - 1} \frac{(c' - \varpi')}{H} \int_{0}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^{\frac{n+1}{n-1}} \psi}.$$

Posons :

$$m + 1 = \frac{n + 1}{n - 1}$$

il viendra :

$$F(c, c') = \frac{2}{n - 1} \frac{(c' - \varpi')}{H} \xi_m(\psi)$$

ξ_m étant la fonction :

$$\xi_m(\psi) = \int_{0}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^{m+1} \psi}$$

qu'on rencontre dans la théorie d'Euler en Balistique Extérieure[1].

Appelons Ψ la valeur de ψ quand c prend la valeur C à l'extrémité du canon ; on aura :

$$y = \frac{10}{\sigma} \operatorname{tg} \theta \frac{c' - \varpi'}{n - 1} \frac{\sin \Psi}{\xi_m(\Psi)} \xi_m^2(\psi)$$

et cette formule permettra le calcul, par points, de la courbe génératrice des rayures, car à chaque valeur de ψ correspondront une valeur de y et une valeur de c.

On a d'ailleurs :

$$\operatorname{tg} \theta = k \frac{10}{\sigma} \frac{F(C, c')}{f(C, c')} = \frac{10}{\sigma} k \frac{2}{n - 1} \frac{c' - \varpi'}{H^2} \frac{\xi_m(\Psi)}{\sin \Psi}.$$

Cherchons la tangente à l'origine qui est :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{10}{\sigma} k \frac{2}{n - 1} \frac{(c' - \varpi')}{H^2} \frac{\xi_m(\psi)}{\sin \psi}$$

Pour $\psi = 0$, cette formule se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. La valeur en est, en prenant les dérivées des deux termes de la fraction du second membre :

$$\frac{1}{\cos^{m+2} \psi}$$

ce qui a pour valeur l'unité lorsque ψ tend vers zéro.

Donc, l'angle $\varepsilon = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ à l'origine des rayures, a pour valeur :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \theta \frac{\sin \Psi}{\xi_m(\Psi)}.$$

On a ainsi les inclinaisons initiale ε et finale θ de la *rayure progressive à résistance constante*.

5° On pourra, en pratique, connaissant ε et θ, remplacer la

[1] Ch. 5, p. 235.

courbe par un arc de cercle admettant les mêmes tangentes ε et θ en ces deux points.

On construira immédiatement cet arc en menant par le point O, origine des rayures, une droite OY, telle que l'angle

$$YOC = \varepsilon + \frac{\theta - \varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon + \theta}{2}$$

ce qui déterminera le point Y sur l'ordonnée C de la bouche du canon.

Le cercle passera alors en C et en O, où il sera tangent à la droite OT d'inclinaison ε.

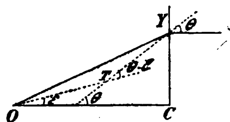


Fig. 28 *bis*

6° La solution précédente est la généralisation d'une méthode qui a été indiquée par le C^t Terquem[1] et qui a été employée pour le tracé des rayures de l'artillerie modèle 1877 (Guerre).

67. **Forcement au départ.** — Pendant les premiers instants du déplacement du projectile, le refoulement du métal de la ceinture ou de la chemise par le cône de raccordement, puis l'entaille de la ceinture par les cloisons produisent une résistance qui disparaît pendant le reste du mouvement.

L'effort de démarrage ou de *forcement* est assez considérable ; on peut l'estimer en moyenne à 500 kilogrammes par centimètre carré; mais il varie évidemment beaucoup avec le montage du projectile, le nombre et la forme des ceintures, la disposition des rainures qui y sont pratiquées, l'état d'usure du canon, etc.

Il serait nul avec des projectiles tels que ceux qui ont été employés pour certaines expériences spéciales où les empreintes des cloisons ont été pratiquées à l'avance dans la ceinture et où, par suite, le projectile peut être poussé

[1] TERQUEM p. 217.

librement de la bouche à sa position de tir en se vissant dans les rayures.

On voit, d'après cela, que l'effort de *forcement* ou *pression* P_0 *de forcement* est une *caractéristique* du projectile relativement au canon, qu'il serait nécessaire de connaître, dans chaque cas particulier, pour pouvoir l'introduire dans les formules de la Pyrodynamique. Cette variable ne figurera d'ailleurs pas explicitement dans les équations différentielles et s'introduira seulement, comme une condition à la limite, en écrivant que la vitesse du projectile est nulle tant que la pression P_0 n'a pas été atteinte dans la capacité close que forme, jusque-là, la chambre à poudre.

Si Δ est la *densité de chargement* employée, la formule de Noble et Abel

$$P_0 = f \frac{\Delta}{1 - \eta\Delta} z_0$$

fera connaître la fraction de poudre brûlée z_0 au moment du démarrage du projectile.

On dira plus loin (ch. VIII, § 1) quelles sont les méthodes pratiques qu'on peut employer pour la détermination expérimentale de la pression de forcement P_0.

§ 2. — LES PROBLÈMES SECONDAIRES DE LA CHARGE

68. **Termes secondaires de la charge.** — Pour pouvoir admettre, en première approximation, et porter dans les équations du mouvement (51), l'hypothèse qu'une pression moyenne P règne dans tout l'espace $c - \varpi'$ en arrière du culot du projectile, il a fallu : 1° tenir compte de l'*énergie cinétique* de la charge en majorant le poids

du projectile de la quantité $2\dot{\varpi}$; 2° tenir compte de l'*énergie vibratoire* entretenue par les ondes d'Hugoniot en donnant à l'exposant de détente γ une signification généralisée.

Ce ne sont là, évidemment, que des approximations qui laissent subsister des termes secondaires ou correctifs que, dans l'ignorance où nous sommes des lois de la propagation du mouvement dans le milieu gazeux, nous devons considérer comme complètement inconnus.

On doit signaler, en outre, la perte d'énergie de la charge résultant du chambrage de la bouche à feu ; il se produit, dans la veine gazeuse, une section étranglée qui correspond, comme dans toute question d'écoulement gazeux ou liquide, à une perte de charge. Elle est comprise et comptée en gros, tout au moins, dans la détermination expérimentale de l'exposant γ.

69. **Coefficient de vivacité.** — Les conditions dans lesquelles s'opère la combustion de la poudre dans la bouche à feu sont différentes de celles réalisées en vase clos; aussi doit-on s'attendre à ce que la *vivacité* A qui caractérise la poudre, subisse quelques modifications. Il est possible que, dans le canon, on doive trouver A plus grand que dans la bombe, car il semble que l'alignement des brins suivant la longueur de la chambre et le mécanisme d'entretien de la veine gazeuse par ondes d'Hugoniot doivent être favorables à une inflammation et à une combustion plus rapide et plus régulière que dans la bombe.

Lorsque la poudre n'est pas soigneusement alignée le long de la chambre à poudre et que, par exemple, on la met *en vrac*, on est exposé à la production de phéno-

mènes de *surpression*. La masse gazeuse semble animée d'un mouvement oscillatoire d'ensemble avec une vitesse de l'ordre de 1 000 à 1 200 mètres et la vague gazeuse vient alternativement frapper le culot du projectile et la culasse ; elle agit dynamiquement sur les crushers qui indiquent des pressions très considérables et elle est capable de fausser le mécanisme de culasse. M. Vieille[1] a reproduit expérimentalement les caractères principaux du phénomène en tirant, dans une longue éprouvette d'acier, des charges placées dissymétriquement et a étudié la propagation de l'onde qui prend naissance.

70. **Amorçage.** — L'inflammation des poudres colloïdales exige l'emploi, entre l'étoupille et la charge, d'un relai de poudre très vive, par exemple, de la poudre noire. Mais le mode d'amorçage n'est pas indifférent, on le conçoit, sur le mode de combustion de la poudre. Il paraît évident que plus l'amorçage est énergique, plus la *vivacité* de la poudre devient grande, jusqu'à une certaine limite correspondant sans doute à l'inflammation simultanée de tous les brins de poudre à la fois sur toute leur surface.

On obtient un amorçage plus ou moins intense, non pas en agissant sur le poids de la charge d'amorce, mais en produisant la combustion de celle-ci sous pression, c'est-à-dire dans un récipient muni de canaux étroits d'échappement, de sorte que les gaz, qui sont émis, soient à une température et à une pression très élevées.

71. **Pression au culot et à la culasse.** — P est la pression moyenne de la poudre dans l'âme. La pression

[1] Vieille. 4.

au culot du projectile est P_{AV} et la pression à la culasse P_{AR}. Si on considère la tranche gazeuse au contact du culot, dont la pression est P_{AV}, on écrira pour l'équation du mouvement

$$\frac{p}{g}\frac{dv}{dt} = \sigma P_{AV}$$

σ étant la section de l'âme.

La tranche, au contact de la culasse, doit faire équilibre à l'inertie totale du projectile et de la charge.

On a donc

$$\frac{p + \vartheta\varpi}{g}\frac{dv}{dt} = \sigma P_{AR};$$

on en déduit

$$P_{AR} = \frac{p + \vartheta\varpi}{p} P_{AV}$$

ou

$$P_{AR} = \left(1 + \vartheta\frac{\varpi}{p}\right) P_{AV}.$$

La pression à la culasse est plus grande que la pression au culot P_{AV} *dans le rapport de* 1 *à* $1 + \vartheta\frac{\varpi}{p}$.

La mesure expérimentale simultanée des pressions P_{AR} à la culasse, et P_{AV} au culot, offrirait donc un moyen de déterminer le coëfficient ϑ et à plusieurs reprises cette expérience a été tentée au LCM.

Malheureusement, ainsi qu'il a été exposé précédemment (54), un autre facteur intervient dans le phénomène ; c'est le *chambrage* qui a pour effet de rendre plus petites les pressions mesurées au culot ; il agit donc en

sens contraire du terme $\left(1 + \delta \frac{\varpi}{p}\right)$ et si on représente le rapport des pressions au culot et à la culasse par une puissance inconnue du chambrage $\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)$, on écrira

$$P_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma'}\right)^x \left(1 + \delta \frac{\varpi}{p}\right) P_{\mathcal{N}}$$

Il devient dès lors difficile de séparer expérimentalement l'influence des deux multiplicateurs de $P_{\mathcal{N}}$.

§ 3. — Les problèmes secondaires du canon

72. **Les termes secondaires du canon.** — Les gaz de la charge, en contact avec le canon, lui cèdent une partie de leur énergie qui, par suite, n'est pas employée à la propulsion du projectile. Cette fraction d'énergie de la charge se transforme en trois formes d'énergie dans la bouche à feu : en énergie *cinétique*, qui produit le recul de la pièce, en énergie *calorifique* qui échauffe les parois du canon ; en énergie *élastique* qui déforme momentanément les enveloppes d'acier qui constituent la bouche à feu. Nous examinerons succinctement ces trois phénomènes.

73. **Recul.** — Nous avons représenté par $\frac{p + \delta\varpi}{g}$ la masse fictive, projectile et charge, qui est mise en mouvement par les gaz de la poudre avec une vitesse v qui est celle du projectile. Soit, au même instant, π le poids du système reculant (canon et berceau), et v' la vitesse que cet ensemble possède. Le théorème de la conservation du

centre de gravité, appliqué au système soumis à l'action de forces intérieures, permet d'écrire :

$$\pi v' = (p + \vartheta\varpi)\, v.$$

D'autre part, la force vive de ces deux masses qui, pour se produire, a emprunté l'énergie de la charge est égale à

$$\frac{1}{2g}\left[(p + \varpi\vartheta\, (v^2 + \pi v'^2\right].$$

ce qui pourra s'écrire :

$$\frac{1}{2g}\,(p + \vartheta\varpi)\, v^2 \left(1 + \frac{\pi}{p + \vartheta\varpi}\right).$$

Ainsi donc, pour tenir compte, dans les équations du mouvement de la force absorbée par le recul du canon, il suffira de multiplier la masse fictive $\frac{p + \vartheta\varpi}{g}$ du projectile par le facteur

$$1 + \frac{\pi}{p + \vartheta\varpi};$$

où π est le poids de la masse reculante.

La démonstration ci-dessus suppose que le canon peut reculer librement. S'il est monté sur un affût à frein hydraulique, hydropneumatique ou autre, le recul rencontre une résistance qui bientôt arrête le mouvement produit. Mais, dans les questions de Balistique Intérieure que nous traitons ici, le canon a reculé d'une quantité très petite lorsque le projectile franchit la tranche de la bouche; et comme la résistance initiale des freins est très faible, souvent nulle même, la formule ci-dessus sera encore applicable dans le cas général.

74. **Echauffement du canon.** — Le canon s'échauffe pendant le tir ; mais, dans le cours des tirs ordinaires d'expériences où la vitesse du tir n'est pas excessive, on n'observe pas, d'un coup à l'autre, dans les vitesses initiales et les pressions maxima mesurées, de différences ayant une allure systématique, et pouvant être attribuées à la chaleur croissante de la bouche à feu. On en conclut donc que la chaleur qui, à chaque coup, est gagnée par la bouche à feu aux dépens de l'énergie de la charge, est à peu près constante ce qui revient à dire que la chaleur spécifique du métal est également constante dans les limites de l'élévation de température observée.

Si on considérait des armes à tir très rapide, telles que les mitrailleuses ou les canons automatiques (5 à 600 coups par minute), tirées dans les conditions même de leur emploi à la guerre, on constaterait, sans doute, une influence de l'échauffement au fur et à mesure du tir, car la température du tube atteint des chiffres relativement considérables (2 à 300°)[1]. Au point de vue de l'emploi de ces engins, cette modification progressive des trajectoires rentre plutôt dans l'étude du *régime* des pièces et de celle des procédés de *réglage du tir* qui sont du domaine spécial de la Balistique Appliquée et dont nous ne nous occupons pas ici.

75. **Déformations élastiques du canon.** — Une certaine portion de l'énergie de la charge agit sur l'acier du canon en produisant une dilatation des tubes qui le composent. On admet, ce que l'expérience prouve d'ailleurs, que les déformations élastiques des canons sont *statiques*,

[1] BILLARDON.

c'est-à-dire qu'aucune vibration transversale d'amplitude notable ne se superpose à la déformation d'ensemble produite par la pression actuellement appliquée à l'intérieur de l'âme ; la déformation élastique suit exactement la pression dans sa croissance et dans sa décroissance.

On pourrait calculer aisément l'agrandissement de l'âme sous la pression ; il a pour effet d'augmenter légèrement la valeur du volume *c* qui entre dans les formules ; c'est là un premier terme secondaire dû aux déformations élastiques.

L'autre terme proviendrait de la force élastique emmagasinée dans le tube déformé et qui, d'ailleurs, est rendue presque complètement dans la période descendante de la courbe des pressions.

Le canon, comme une verge élastique, ou mieux comme un tube de Bourdon, redressé subitement par l'action d'une pression intérieure, peut également prendre un mouvement vibratoire qui est, naturellement encore, une cause de perte d'énergie de la charge, relativement à la propulsion du projectile.

76. **Coup de flambage.** — 1° On peut, peut-être, rattacher à des phénomènes élastiques, les propriétés si curieuses du coup *de flambage*. Le premier coup de canon d'une série se distingue nettement des autres tirés après lui : pression maximum et vitesse initiale plus faibles, usure différente des ceintures, etc.

Il semble que le canon soit mis, par le premier coup, dans un état élastique qui subsiste pendant un certain temps et qu'il absorbe, dans cette mise en tension, une plus forte portion de l'énergie de la charge.

Les causes du coup de flambage n'ont point été recon-

nues encore et on ne peut guère, à l'heure actuelle, qu'émettre des hypothèses. Quelques propriétés curieuses des fers et des aciers, que nous avons eu l'occasion d'étudier au LCM [1], se sont montrées dépendantes du temps ; ainsi, on peut constater la surélévation progressive de la limite élastique d'un acier qui vient d'être déformé sous une pression statique connue, et aussi, la disparition par la déformation et la réapparition, avec le temps, du *palier* caractéristique des aciers à canons.

Ces rapprochements peuvent indiquer la voie des recherches, mais la question ne parait pas être élucidée.

2° Peut-être les anomalies du coup de flambage sont elles dues, tout simplement, à ce que l'âme du canon se trouve graissée au premier coup d'une série, ce qui différencie ce coup des autres ; le coefficient de frottement ν (65) aurait une valeur plus faible, ce qui expliquerait bien le sens des différences constatées. C'est ainsi que le *graissage* des ceintures du projectile a été préconisé en vue de diminuer l'usure des ceintures et celle du canon.

§ 4. — Les problèmes secondaires de l'atmosphère

77. **Résistance de l'air.** — A l'avant du projectile, l'air oppose une résistance au mouvement du projectile, quelle en est la grandeur ?

Le problème a été complètement traité par le capitaine Hugoniot [2] ; la résistance R par unité de surface est donnée par la formule :

$$R = p_0 + \frac{\gamma + 1}{4} \rho_0 V^2 + \rho_0 V \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 V^2 + a^2}$$

[1] Ch. 2. p. 53.
[2] Hugoniot. p. 198.

où :

$$p_0 = 1\,0330 \text{ kilogrammes par mètre carré} \quad \gamma = 1{,}4$$

$$\rho_0 = \frac{\Delta}{g} = \frac{1\,208}{9{,}81} = 0{,}123 \quad a = 340$$

Le graphique suivant indique la résistance par centimètre carré qui résulte du calcul numérique de la formule ci-dessus.

On voit que la résistance de l'air à l'intérieur de l'âme est toujours négligeable pour les vitesses actuellement réalisées en artillerie.

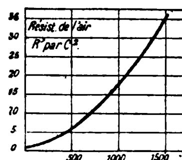


Fig. 29.

78. **Vitesse initiale.** — Enfin, on doit signaler que, après la sortie du projectile de l'âme de la bouche à feu, les gaz de la poudre continuent encore à agir sur le boulet. On a donné plus haut (55) la manière probable dont se fait le passage du domaine de la Balistique Intérieure, à celui de la Balistique Extérieure.

Or, d'une part, les formules de la Balistique Intérieure introduisent le *volume total de l'âme* C, C étant compté jusqu'à la bouche de la pièce et la vitesse V_0 qu'elles permettent de calculer, s'applique à la vitesse au passage du culot du projectile à la tranche de la bouche.

Cette visesse V'_0 sera lègèrement plus petite que la vitesse maximum communiquée au projectile par les gaz de la poudre qui ne cessent pas instantanément d'agir. C'est cette vitesse maximum V_0, qui se produit à quelque distance en avant de la bouche, que donneront les chronographes destinés à la mesure de la vitesse du projectile.

On ignore la loi exacte qui, suivant le calibre et la charge, relie les deux quantités V_0 et V'_0. De là, l'intro-

duction, dans le problème de la Balistique Intérieure, d'une cause d'erreur, c'est-à-dire la nécessité de la considération d'un terme secondaire.

79. **Résumé. Enumération des termes secondaires.** — Les termes secondaires du problème de la Balistique Intérieure, se rapportent aux quatre objets que cette science met en présence : le tableau suivant renferme, pour chacun d'eux, la désignation des principaux termes secondaires.

1° *Projectile.* — 1. Force vive de rotation ; 2. Action des ceintures pendant le mouvement 3. Forcement au départ, etc.

2° *Canon.* — Echauffement ; 2. Vibrations ; 3. Usure ; 4. Recul, etc.

3° *Poudre.* — 1. Etranglement de la veine ; 2. Chambrage ; 3. Tourbillons et frottement sur les parois ; 4. Action des rayures ; 5. Variation des pressions dans le sens de l'axe ; 6. Pressions ondulatoires ; 7. Amorçage ; 8. Forme et disposition des fagots ; 9. Force vive de la charge ; 10. Hypothèse de la détente ; 11. Dissociation des gaz ; 12. Variations dans le canon des lois de la Pyrostatique ; 13. Variations accidentelle ou systématique des lots de poudre, etc.

4° *Atmosphère.* — 1. Résistance de l'air à l'intérieur de l'âme ; 2. Action des gaz après la sortie du projectile.

§ 2. — Les équations du problème principal de la Pyrodynamique.

80. **Problème principal.** — Après avoir passé en revue les principaux termes secondaires et distingué leurs causes, leur mode d'action et d'influence sur les constantes du problème, on est en mesure d'aborder la recherche des équations qui vont définir le mouvement du projectile dans l'âme du canon.

Les équations, au nombre de trois, correspondent une à une aux trois lois physiques qu'il est nécessaire d'admettre pour poser, en termes mathématiques, le problème principal de la Pyrodynamique.

81. **Première loi. Loi d'inertie.** — Nous admettons que, dans toute la portion de l'âme située en Æ du projectile et occupée par les gaz de la charge, règne, à l'instant t, une certaine pression P, uniforme. Cette pression, comptée en kilogrammes par centimètre carré, donne une pression totale $\frac{\pi a^2}{4}$ P sur le culot, a étant le diamètre de l'âme rayée, compté en centimètres.

Cette pression fait équilibre, à chaque instant, suivant le théorème fondamental de la Dynamique, aux forces d'inertie. Nous avons dit (51) comment, dans ces forces d'inertie, entre une *masse fictive*, somme de la masse m du projectile et d'une fraction $\mathfrak{z}$ de la masse $\frac{\varpi}{g}$ de la charge; cette masse est affectée, en plus, de termes perturbateurs (64) dont l'effet total sera rappelé par le coefficient i.

Posons donc

$$\mu = i\,\frac{p + \mathfrak{z}\varpi}{g}$$

On aura, par le théorème de d'Alembert

$$\mu\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pi a^2}{4}\,\mathrm{P}$$

x étant le parcours du projectile.

C'est la *première équation* cherchée.

Les *termes secondaires* qui affectent cette équation seront dus :

1° A l'erreur commise en adoptant dans les calculs et

les applications une valeur constante et arbitraire pour le coefficient ϑ.

2° Aux facteurs i qui viennent multiplier μ et qui proviennent de la *rotation* du projectile, du *frottement* dans l'âme et enfin du *recul* (79).

82. **Deuxième loi. Loi de combustion.** — La pression P étant considérée comme uniforme dans l'âme, si on imagine l'état de la masse, mélange de gaz et de poudre solide à un instant donné, on se trouvera exactement dans les mêmes conditions que dans une expérience en vase clos. La vitesse de combustion instantanée, sera donc représentée par la même équation que dans une bombe, c'est-à-dire qu'on aura

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z)P$$

pour la *deuxième équation* de la Pyrodynamique.

Les *termes secondaires* qui affectent cette seconde équation proviendront des erreurs commises en prenant la *vivacité* A et la *fonction de forme* $\varphi(z)$ du canon égales à leurs valeurs dans la bombe (79). Ils proviendront aussi des inexactitudes des lois expérimentales de la combustion en vase clos, de l'amorçage etc., etc. On représentera leur effet global par un coefficient j, qui, éventuellement, viendra multiplier la *vivacité* A; on posera alors $A' = jA$.

83. **Troisième loi. Loi de détente.** — Pour déterminer la troisième équation qui nous est nécessaire et qui donne la relation entre x, P et z, nous allons procéder comme dans le cas d'une combustion instantanée (45) c'est-à-dire que nous supposerons que tout se passe, en

toute rigueur, suivant les principes de la Thermodynamique; puis nous verrons comment on peut généraliser l'équation de manière à ce qu'elle puisse représenter les phénomènes de la Pyrodynamique.

Pour établir la formule de la combustion instantanée, nous sommes partis de l'équation d'une *détente adiabatique* :

$$P(c - \varpi')^n = f\varpi(c' - \varpi')^{n-1}$$

pour arriver à la formule qui relie la vitesse v au parcours c et qui est

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{10 f\varpi}{n-1}\left[1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{n-1}\right].$$

De ces deux équations, on déduit la suivante :

$$P(c - \varpi') + \frac{n-1}{2}\frac{m}{10}v^2 = f\varpi$$

qui s'interprète aisément suivant les principes de la Thermodynamique :

Le premier terme du premier membre $P(c - \varpi')$ représente l'*énergie potentielle* de la charge à l'état de détente auquel elle est actuellement parvenue (pression P, volume $c - \varpi'$);

Le second terme $\frac{n-1}{2}\frac{mv^2}{10}$ est l'*énergie potentielle* qui est passée dans le projectile et dont la valeur dépend de la différence $n - 1$, n étant le rapport des chaleurs spécifiques.

Enfin, le second membre représente l'*énergie totale* de la charge $f\varpi$.

Rien n'est plus aisé alors que d'appliquer cette équation

au cas d'une combustion non instantanée de la poudre. Il suffira, au lieu de considérer comme constante l'énergie de la charge, d'écrire que, à l'instant considéré, elle a pour valeur $f\varpi z$, puisque ϖz est justement, à l'instant actuel, la portion de la charge convertie en gaz et par suite la seule qui est active.

On aura donc l'équation

$$P(c - \varpi') + \frac{n-1}{2}\frac{m}{10}v^2 = f\varpi z.$$

C'est la relation qui, établie par M. Résal en 1864[1], a été prise, depuis lors, comme équation fondamentale de la Balistique Intérieure.

Pour la mettre en accord avec les phénomènes réels qui se passent dans l'âme du canon et dont nous avons fait précédemment l'analyse détaillée, il suffit

1° de remplacer m par la *masse fictive* $\mu = i\,\frac{p + 2\varpi}{g}$;

2° de tenir compte de l'énergie de la charge dissipée sous forme d'ondes d'Hugoniot, des phénomènes calorifiques, hydrodynamiques, élastiques qui se passent dans l'âme du canon et pour cela d'enlever au coefficient de mv^2 son caractère théorique pour le considérer comme purement expérimental.

Appelant λ un nombre plus grand que 1, l'équation pourra être mise sous la forme

$$P(c - \varpi') + \lambda\frac{n-1}{2}\frac{\mu}{10}v^2 = f\varpi z$$

et on posera

$$\frac{\gamma - 1}{2} = \lambda\frac{n-1}{2}$$

[1] Résal.

c'est-à-dire

$$\gamma = 1 + \lambda (n - 1).$$

L'exposant γ est dit l'exposant expérimental de détente.

84. **Résumé.** — 1° Ainsi donc, on pourra prendre les 3 équations de la Pyrodynamique sous la forme suivante

(1) $\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pi a^2}{4} P$ équation d'*inertie*

(2) $\frac{dz}{dt} = A\varphi(z)P$ équation de *combustion*

(3) $P(c - \varpi') + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10} v^2 = f\varpi z$ équation de *détente*.

On voit moyennant quelles hypothèses et quelles généralisations, on est arrivé à ce système d'équations. N'ayant l'ambition que de représenter le premier terme d'une série, nous avons pu, par la signification des lettres et leur élasticité, donner à la fois satisfaction au principe général de l'équivalence du travail et de l'énergie, aux lois expérimentales constatées et aux influences des termes secondaires négligés. Ce système d'équations, avec le *flou* qui entoure pour ainsi dire chaque lettre qui y figure, traduit bien ainsi ce qu'il y a d'incertain et d'inconnu dans la nature des phénomènes étudiés par la Balistique Intérieure. Chaque lettre se présente donc comme une fonction développable en série suivant des arguments divers ; les progrès ultérieurs de la science de la Pyrodynamique (qui conservera toujours, sans doute, comme terme principal, celui que représentent les trois équations différentielles) consisteront dans l'étude et la connaissance de plus en plus précise de ces fonctions perturbatrices.

2° Ici, nous devons donc considérer comme terminé le le problème *physique* de la Pyrodynamique; par sa mise en équations, il a été réduit à un problème d'analyse. Ce sont les conséquences rigoureuses de ces équations qui vont faire l'objet de l'étude que va se proposer maintenant la Pyrodynamique Rationnelle.

TROISIÈME PARTIE

PYRODYNAMIQUE RATIONNELLE

CHAPITRE V

LES FORMULES DE LA BALISTIQUE INTÉRIEURE

§ 1. — Intégration des équations du mouvement

85. **Equations différentielles du mouvement.** — 1° Nous avons vu (84), dans l'étude de la Pyrodynamique physique, que la discussion des phénomènes de la combustion de la poudre, dans l'âme du canon, conduisait à prendre les trois *équations différentielles* de la Balistique Intérieure sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \mu \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pi a^2}{4} \mathrm{P},$$

$$(2) \qquad \frac{dz}{dz} = \mathrm{A}\varphi(z)\mathrm{P},$$

$$(3) \qquad \mathrm{P}(c - \varpi') + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10} v^2 = f\varpi z.$$

Ces équations sont valables depuis l'origine du mouvement ($x = 0$ ou $c = c'$) jusqu'à la fin de la combustion de la poudre, définie par la relation $z = 1$.

2° Rappellons la signification des lettres et les unités choisies :

z est, à l'instant t, le rapport du poids de poudre brûlée au poids total initial ϖ de la charge ; z est dit la *fraction brûlée* au temps t;

P est la pression moyenne dans l'âme en *kilogrammes par centimètre carré* ;

μ a pour expression :

$$\mu = i\,\frac{p + \varepsilon\varpi}{g},$$

formule où p est le poids du *projectile en kilogrammes* ; g la gravité ; ε un coefficient numérique, laissé arbitraire dans les formules, qui tient compte de l'inertie de la charge ; i un coefficient qui tient compte des frottements le long de l'âme, de *l'inertie de rotation du projectile, de la masse du système reculant*, etc. ;

x est le *parcours du projectile en mètres*, à partir de la position de chargement, où $x = 0$.

a est le *diamètre de l'âme rayée en centimètres* ; $\frac{\pi a^2}{4}$ P est donc la pression totale en kilogrammes sur le culot du projectile ; c'est la *force motrice* ;

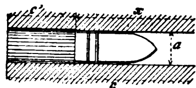


Fig. 29 *bis*

c représente le *volume* variable de l'âme, depuis l'arrière de la chambre à poudre jusqu'à la position actuelle du projectile, en *décimètres cubes* ;

c' représente le *volume de la chambre à poudre* en *décimètres cubes*, de l'arrière de la chambre à poudre jusqu'à la position de chargement du projectile;

ϖ est le *poids de la charge en kilogrammes* ;

$\varpi' = \eta\varpi$ est le poids ϖ multiplié par le *covolume* η. On emploie aussi les notations : $\Delta' = \frac{\varpi'}{c'}$, *densité de chargement* ;

$\rho = \frac{c}{c'}$ *division* de l'âme.

$$\theta = \frac{1 - \Delta'}{\rho - \Delta'} = \frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}$$

θ est la *fonction de détente*.

A cause des unités choisies, *mètre pour x, décimètre cube pour c et c', centimètre pour a,* on a :

$$\frac{\pi a^2}{4} x = 10 (c - c').$$

C'est ce choix des unités qui introduit le facteur 10 dans la troisième équation différentielle.

3° Les *caractéristiques* de la poudre qui entrent dans les formules sont :

f la *force* de la poudre en kilogrammes par centimètre carré ;

η le *covolume* qui, pour les applications avec les poudres françaises actuelles, peut être pris égal à l'unité ;

On a donc : $\varpi' = \varpi$ et $\Delta' = \Delta$.

A la *vivacité* de la poudre.

$\varphi(z)$ est la *fonction de forme* représentée, en général, par les formules : $\varphi(z) = (1 - z)^{\beta}$ pour les poudres *dégressives* ; $\varphi(z) = z^{\beta'}$ pour les poudres *progressives*.

Pour les poudres à combustion constante on a $\varphi(z) = 1$.

β ou β' seront dits la *forme* de la poudre.

γ est *l'exposant expérimental de détente*.

86. **Intégrale de la vitesse.** — Au temps t, soit v la vitesse du projectile, telle que $v = \frac{dx}{dt}$; l'équation (1) s'écrira :

$$\mu \frac{dv}{dt} = \frac{\pi a^2}{4} P.$$

Eliminant dt entre cette équation et l'équation (2), il viendra :

$$\mu dv = \frac{\pi a^2}{4} \frac{1}{A} \frac{dz}{\varphi(z)},$$

ou, en posant :

$$\sigma = \frac{\pi a^2}{4}$$

(σ étant ainsi la *section de l'âme rayée* en centimètres carrés),

(4) $$\mu dv = \frac{\sigma}{A} \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

Soit P_0 la *pression de forcement* (67). Avant que le projectile ne se mette en marche, la combustion se fait en vase clos et, à cette pression P_0 correspond une certaine fraction z_0 de la charge qui brûle avant tout mouvement du projectile : cette *fraction de forcement* se calculera par la formule de Noble et Abel :

$$z_0 = \frac{P_0 (c' - \varpi')}{f\varpi} = \frac{P_0}{P'}.$$

Pour $z = z_0$, on aura donc, par hypothèse, $v = 0$.

On intégrera, par suite, l'équation (4), pour avoir la vitesse v, quand une fraction z de poudre est brûlée, par la formule :

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

Posons, comme définition d'une *fonction de z*, l'intégrale :

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{dz}{\varphi(z)},$$

dont une table aura pu être calculée une fois pour toutes au moyen de la *fonction de forme* expérimentale $\varphi(z)$.

On aura alors :

$$v = \frac{\sigma}{A\mu}\left[\mathbf{M}(z) - \mathbf{M}(z_0)\right]$$

ou, par abréviation :

$$(5) \qquad v = \frac{\sigma}{A\mu}\left[\mathbf{M} - \mathbf{M}_0\right]$$

ou encore :

$$v = \frac{\sigma}{A\mu}\,\mathbf{V}_{z_0}^{z},$$

le symbole $\mathbf{V}_{z_0}^{z}$ représentant la différence $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0$, fonction de deux variables z et z_0 ; on supposera qu'on a calculé une table à double entrée de la fonction $\mathbf{V}_{z_0}^{z}$.

Ainsi donc, la *vitesse* v est connue en fonction de la *fraction brûlée* z.

87. **Vitesse de stricte combustion.** — Cette formule, qui ne s'applique pas pour $z < z_0$, ne doit être employée que jusqu'à la valeur $z = 1$. Quand $z = 1$, cela signifie que la poudre est complètement brûlée et, à ce moment, correspond une vitesse V_1, dite de *stricte combustion*, donnée par la formule :

$$(6) \qquad V_1 = \frac{\sigma}{A\mu}\left[\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0\right]$$

ou :

$$V_1 = \frac{\sigma}{A\mu}\,\mathbf{V}_{z_0}^{1}.$$

88. **Intégrale de l'espace.** — Considérons tout d'abord le mouvement du projectile avant la fin de la combustion, c'est-à-dire pour z variant de z_0 à 1.

L'équation (2) s'écrira, en remplaçant $\frac{1}{dt}$ par $\frac{v}{dx}$:

$$\mu \frac{vdv}{dx} = \frac{\pi a^2}{4} \mathrm{P},$$

et, comme on a :

$$\frac{\pi a^2}{4} x = 10 (c - c'),$$

il viendra :

$$\mu v dv = 10 \mathrm{P} dc.$$

L'équation (3), en remplaçant P par la valeur ci-dessus, s'écrit :

$$\frac{\mu v dv}{10} \frac{c - \varpi'}{dc} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10} v^2 = f \varpi z.$$

Mais, on a trouvé précédemment (équations 4 et 5) :

$$dv = \frac{\sigma}{\mathrm{A}\mu} \frac{dz}{\varphi(z)}$$

et :

$$v = \frac{\sigma}{\mathrm{A}\mu} \mathbf{V}_{z_0}^{z}.$$

Remplaçant alors v et dv par leurs expressions en fonction de z, on aura l'équation suivante :

$$\frac{dc}{c - \varpi'} = \frac{\mu}{10} \left(\frac{\sigma}{\mathrm{A}\mu}\right)^2 \frac{\mathbf{V}_{z_0}^{z}}{\varphi(z)} \frac{dz}{f \varpi z - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10} \left(\frac{\sigma}{\mathrm{A}\mu}\right)^2 \left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^2}$$

qui se mettra sous la forme :

$$\frac{\gamma - 1}{2} \frac{dc}{c - \varpi'} = \mathbf{r} \frac{\mathbf{V}_{z_0}^{z}}{z \varphi(z)} \frac{dz}{1 - \mathbf{r} \frac{\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^2}{z}}.$$

en posant

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2$$

Les variables sont séparées et on intégrera par la formule :

$$(7) \quad \frac{\gamma - 1}{2} \operatorname{Log} \frac{c - \varpi'}{c' - \varpi'} = \mathbf{r} \int_{z_0}^{z} \frac{\mathbf{V}_{z_0}^2}{z\varphi(z)} \frac{dz}{1 - \mathbf{r} \frac{[\mathbf{V}_{z_0}^2]^2}{z}}$$

où les limites sont z et c, d'une part, et d'autre part z_0 et c', à l'origine du mouvement. On écrira aussi le premier membre

$$-\frac{\gamma - 1}{2} \operatorname{Log} \theta.$$

Telle est la formule qui fait connaître l'espace c parcouru en fonction de la fraction z de poudre brûlée. Comme on a, d'autre part, l'équation :

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} \mathbf{V}_{z_0}^2$$

on connaîtra la vitesse correspondant à cette même fraction z.

La pression en un point sera ensuite déterminée par la troisième des équations différentielles du mouvement :

$$P(c - \varpi') + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10} v^2 = f\varpi z$$

où c, v et z sont connus actuellement.

Le problème de la Balistique Intérieure est donc ainsi complètement résolu, puisqu'il est ramené à une quadrature.

Mais, la complication de la solution est extrême ; les

applications numériques et la résolution des problèmes usuels exigeraient, en effet, la construction d'une table à triple entrée (z, z_0 et $\mathbf{r}$) représentant l'intégrale qui donne $\text{Log}\,\frac{c - \varpi'}{c' - \varpi'}$; la discussion du mouvement est, d'autre part, presque impossible avec une forme aussi compliquée. Aussi, allons-nous essayer, par une transformation convenable de l'équation (7), d'arriver à une simplicité plus grande. Ce résultat s'obtiendra par un développement particulier en série de l'intégrale du second membre, intégrale que nous désignerons par D (z, z_0, $\mathbf{r}$) ou, plus simplement, par D.

§ 2. — La solution sous forme de série

89. **Premier développement en série de l'intégrale D (z, z_0, r).** — On remarquera que le terme $\mathbf{r}\,\frac{[\mathbf{V}_{z_0}]^2}{z}$ qui figure au dénominateur de l'intégrale, peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{r}\,\frac{[\mathbf{V}_{z_0}]^2}{z} = \frac{\frac{\mu v^2}{2}}{\frac{10 f\varpi}{\gamma - 1} z}$$

c'est-à-dire qu'il est le rapport de la force vive actuelle $\frac{\mu v^2}{2}$ du projectile, au travail total $\frac{10 f\varpi}{\gamma - 1} z$ que peut fournir la fraction z de poudre actuellement brûlée, si on supposait sa détente totalement effectuée.

Par suite, ce rapport est un nombre petit et naturelle-

ment toujours plus petit que l'unité : on pourra donc écrire par division :

$$\frac{1}{1 - \mathbf{r}\frac{\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^2}{z}} = 1 + \mathbf{r}\frac{\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^2}{z} + \mathbf{r}^2\frac{\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^4}{z^2} + \ldots,$$

ce qui constituera une série convergente.

On aura alors, pour l'intégrale, la suite :

$$-\frac{\gamma-1}{2}\operatorname{Log}\theta = \mathbf{r}\int_{z_0}^{z}\frac{\mathbf{V}_{z_0}^{z}}{z\varphi(z)}dz + \mathbf{r}^2\int_{z_0}^{z}\frac{\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^3}{z^2\varphi(z)}dz + \mathbf{r}^3\int_{z_0}^{z}\frac{\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^5}{z^3\varphi(z)}dz + \ldots$$
$$= \mathbf{r}\,\mathbf{W}_{z_0}^{z} + \mathbf{r}^2\overline{\mathbf{W}_{z_0}^{z}} + \mathbf{r}^3\overline{\overline{\mathbf{W}_{z_0}^{z}}} + \ldots$$

ce qui donnera un développement de la solution en une série convergente, ordonnée suivant les puissances de $\mathbf{r}$ et dont les termes sont des fonctions des deux variables z et z_0.

Mais, la convergence de cette série n'est pas très rapide. Appliquons la, par exemple, au cas particulier des *poudres à combustion constante* $\varphi(z) = 1$, et dans l'hypothèse $z_0 = 0$. On a alors :

$$\mathbf{V}_0^z = \mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{dz}{\varphi(z)} = z.$$

Par suite, la série sera la suivante :

$$-\frac{\gamma-1}{2}\operatorname{Log}\theta = \mathbf{r}z + \frac{(\mathbf{r}z)^2}{2} + \frac{(\mathbf{r}z)^3}{3} + \ldots,$$

Cette série représente le développement de la fonction $\operatorname{Log}\frac{1}{1-\mathbf{r}z}$ de sorte qu'on écrirait

$$\mathbf{r}z = 1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

pour solution de l'équation différentielle dans ce cas particulier.

Mais, si on bornait la série à son premier terme

$$-\frac{\gamma-1}{2}\operatorname{Log}\theta = \mathbf{r}z,$$

elle n'est susceptible de donner qu'une très insuffisante approximation. On s'en rend compte, à priori, si on remarque que, $\mathbf{r}$ renfermant en facteur $\frac{\gamma-1}{2}$, on a fait disparaître de la formule l'exposant de détente γ dont l'importance est pourtant, de toute évidence, très considérable.

Ainsi, en conservant le développement sous cette forme, il faudrait prendre un nombre assez grand de termes de la série pour pouvoir espérer une approximation pratique satisfaisante.

90. **La théorie du Général Moisson.** — La théorie que le Général Moisson[1] a présentée de la Balistique Intérieure revient à cette série, réduite à son premier terme, en admettant de plus l'hypothèse $z_0 = 0$.

Il pose ainsi :

$$-\frac{\gamma-1}{2}\operatorname{Log}\theta = \mathbf{r}\mathbf{W}_0^2.$$

En développant $\mathbf{r}$, on voit que $\frac{\gamma-1}{2}$ disparaît de l'équation ; il reste ainsi :

$$-\operatorname{Log}\theta = \frac{\mu}{10f\varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 \mathbf{W}_0^2.$$

Cela revient évidemment à adopter la loi de Mariotte comme loi de détente des gaz de la poudre et à prendre la troisième équation différentielle sous la forme simple :

$$P(c-\varpi') = f\varpi z.$$

[1] Moisson **1** et **2**.

Le Général Moisson spécifie ensuite la fonction $\mathbf{W}_0^z$ en prenant

$$\varphi(z) = (1 - z)^{\frac{2}{3}}$$

et en poussant jusqu'au bout les calculs qui, dans ce cas, peuvent se faire sous forme explicite (98).

91. **Deuxième développement en série.** — Mais il est possible d'obenir une série beaucoup plus convergente, en raisonnant comme il suit, de manière à arriver à une formule analogue à celle reconnue rigoureuse dans le cas de $\varphi(z) = 1$, et admettant cette dernière comme cas particulier limite. De l'équation :

$$-\frac{\gamma - 1}{2} \operatorname{Log} \theta = D(z, z_0, \mathbf{r}),$$

on peut tirer :

$$\operatorname{Log} \theta^{-\frac{\gamma - 1}{2}} = D$$

ou

$$\theta^{-\frac{\gamma - 1}{2}} = e^{D}$$

et enfin

$$1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = 1 - e^{-D}.$$

Développons alors l'exponentielle e^{-D} suivant les puissances de D

$$e^{-D} = 1 - D + \frac{D^2}{1 \cdot 2} - \frac{D^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

on aura ainsi :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = D - \frac{D^2}{1 \cdot 2} + \frac{D^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Remplaçons alors, dans chaque terme, D par son déve-

loppement en série, trouvé au numéro précédent ; il viendra la formule :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{W}^{z}_{z_0} + \mathbf{r}^2 \left[\overline{\mathbf{W}}^{z}_{z_0} - \frac{\left[\mathbf{W}^{z}_{z_0}\right]^2}{1 \cdot 2} \right] + \ldots$$

Le second terme est composé de deux fonctions de signes contraires : il est aisé de voir que ces deux fonctions sont égales dans le cas de $\varphi(z) = 1$ et $z_0 = 0$ (poudres à combustion constante, limite des poudres actuelles). Non seulement le second terme, mais encore tous les autres, à l'exception du premier s'annulent dans le cas des poudres à combustion constante, car $\mathbf{W}^{z}_{0}$ devenant égal à z, l'intégrale se réduit à celle trouvée au numéro précédent :

$$\mathbf{r}z = 1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Ainsi donc, le premier terme de la série qui représentera la solution du problème de la Balistique Intérieure sera

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{W}^{z}_{z_0},$$

en négligeant, comme second terme, une fonction qui est une quantité petite pour une double raison, à cause du facteur $\mathbf{r}$ porté au carré et à cause de la fonction de z et z_0 qui y figure et s'annule pour les poudres limites.

On a donc le droit de considérer seulement le terme principal de la série, en première approximation tout au moins. Le terme secondaire ainsi laissé de côté, ira simplement grossir le nombre des termes secondaires d'origine physique, négligés dans l'établissement des équations différentielles (79). Mais, comme on a l'expression de ce terme sous forme d'une intégrale, on pourrait, si on veut, en tenir

compte en deuxième approximation et de proche en proche obtenir tous les termes de la série.

92. **Expression de $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$.** — On a, par définition :

$$\mathbf{W}_{z_0}^{z} = \int_{z_0}^{z} \frac{\mathbf{V}_{z_0}^{z} dz}{z\varphi(z)}.$$

Remplaçons alors $\mathbf{V}_{z_0}^{z}$ par sa valeur

$$\mathbf{V}_{z_0}^{z} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0,$$

il viendra

$$\mathbf{V}_{z_0}^{z} = \int_{z_0}^{z} \frac{\mathbf{M} dz}{z\varphi(z)} - \mathbf{M}_0 \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z\varphi(z)}.$$

Posons, comme définitions de deux intégrales

$$\mathbf{L}(z) = \int_{0}^{z} \frac{dz}{z\varphi(z)},$$

$$\mathbf{N}(z) = \int_{0}^{z} \frac{\mathbf{M} dz}{z\varphi(z)}.$$

Nous obtiendrons la formule suivante pour la définition de la fonction :

$$\mathbf{W}_{z_0}^{z} = \mathbf{N} - \mathbf{N}_0 - \mathbf{M}_0 (\mathbf{L} - \mathbf{L}_0).$$

93. **Formules de la vitesse.** — D'après ce qui vient d'être exposé, on saura résoudre le problème de la recherche de la vitesse v en un point c de l'âme par les deux formules suivantes

$$v = \frac{\sigma}{\Lambda\mu} \mathbf{V}_{z_0}^{z}$$

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z}$$

$\mathbf{V}_{z_0}^{z}$ et $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$ sont des fonctions de z et z_0 et ont pour définition :

$$\mathbf{V}_{z_0}^{z} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0$$
$$\mathbf{W}_{z_0}^{z} = \mathbf{N} - \mathbf{N}_0 - \mathbf{M}_0 (\mathbf{L} - \mathbf{L}_0)$$

avec les *fonctions balistiques primaires* des poudres :

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{dz}{\varphi(z)}, \quad \mathbf{N}(z) = \int_0^z \frac{\mathbf{M}dz}{z\varphi(z)}, \quad \mathbf{L}(z) = \int_0^z \frac{dz}{z\varphi(z)};$$

le *paramètre* $\mathbf{r}$ a pour valeur

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10} f\varpi \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2$$

et on rappelle que la fonction de détente θ s'exprime par la formule

$$\theta = \frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}.$$

L'espace parcouru c et la vitesse v sont donc exprimés en fonction de la variable auxiliaire z, fraction de poudre brûlée. Si la forme des deux fonctions $\mathbf{V}_{z_0}^{z}$ et $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$ se trouve telle qu'on puisse éliminer z entre elles, on obtiendra l'expression explicite de la vitesse v pour un parcours c, en fonction des données du chargement σ, μ, c', z_0 pour le canon, f, A, ϖ', pour la poudre.

Dans le cas général, on aura calculé, une fois pour toutes, avec la fonction de forme $\varphi(z)$ expérimentale, obtenue par les expériences de Pyrostatique, une table à double entrée de chacune des fonctions secondaires

$$\mathbf{V}_{z_0}^{z} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_{z_0}^{z}.$$

94. **Vitesse initiale.** — Si, au moment où le projectile sort de la bouche de la pièce, la poudre n'est pas

complètement brûlée, on aura la vitesse initiale V_0 par les formules :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = r W_{z_0}^z \qquad \text{où} \qquad \theta = \frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'} = \frac{1 - \Delta'}{\mathrm{q} - \Delta'}$$

$$V_0 = \frac{\sigma}{A\mu} W_{z_0}^z$$

C désigne le *volume* total de l'âme et q la *division* totale de l'âme.

94bis. **Fin de la combustion de la poudre.** — Les formules générales du n° 93 ne sont valables que jusqu'à la fin de la combustion de la poudre qui, analytiquement, est représentée par la condition $z = 1$.

En ce point (V_1, c_1), on aura

$$V_1 = \frac{\sigma}{A\mu} V_{z_0}^1$$

$$1 - \theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = r W_{z_0}^1.$$

On peut éliminer, entre ces deux relations, le rapport $\frac{\sigma}{A}$ et il vient :

$$\mu V_1^2 = \frac{2\sigma}{\gamma - 1} f\varpi \frac{[V_{z_0}^1]^2}{W_{z_0}^1}\left(1 - \theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}}\right).$$

95. **Forme simple de l'équation de la détente.** — 1° Prenons l'équation qui donne l'espace parcouru c en fonction de z,

$$1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = r W_{z_0}^z$$

que nous dériverons relativement aux deux variables c et

z; on aura, en se reportant à la signification des symboles $\mathbf{r}$ et $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$:

$$10 f\varpi (c' - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}} \frac{dc}{(c - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}}} = \frac{\sigma^2}{A^2\mu} \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}_0}{z\varphi(z)} dz.$$

Mais, on a (86) :

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)$$

et

$$dv = \frac{\sigma}{A\mu} \frac{dz}{\varphi z}.$$

Par suite, il viendra :

$$10 f\varpi (c' - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}} \frac{dc}{(c - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}}} = \mu \frac{vdv}{z}.$$

Mais, d'autre part, $\mu v dv = 10 P dc$, de sorte que dc disparaît et qu'on obtiendra la relation :

$$P (c - \varpi')^{\frac{\gamma + 1}{2}} = f\varpi z (c' - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}}.$$

2° Donc, au lieu des trois équations du problème de la Balistique Intérieure (85)

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pi a^2}{4} P, \qquad \frac{dz}{dt} = A\varphi(z) P,$$

$$P (c - \varpi') + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10} v^2 = f\varpi z.$$

on peut, en se bornant, ainsi qu'il a été convenu, au terme principal de la série, substituer le système suivant :

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pi a^2}{4} P, \qquad \frac{dz}{dt} = A\varphi(z) P,$$

$$P (c - \varpi')^{\frac{\gamma + 1}{2}} = f\varpi z (c' - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}}.$$

Cette dernière équation, qui représente la loi de détente des gaz de la poudre pendant la combustion, est bien plus simple que l'équation primitive puisque, au lieu de quatre variables, P, c, v et z que celle-ci comporte, la nouvelle ne contient que les trois variables P, c et z.

Ce fait s'est traduit, comme on sait, dans le développement des calculs, par la substitution à une intégrale qui donne c en fonction des trois variables z, z_0 et **r**, d'une intégrale à deux variables z et z_0 seulement avec **r** en facteur, qui représente le premier terme de la série.

Pour la continuation de la discussion du mouvement et la recherche des autres formules de la Balistique Intérieure, nous prendrons le système des trois équations différentielles qui vient d'être établi.

3° Les calculs du numéro 86 restant exactement les mêmes, puisqu'ils n'intéressent que les deux premières équations, on pourra aisément retrouver les formules du numéro 93 en partant des trois équations ci-dessus, par un calcul inverse de celui qui vient d'être développé.

A cet effet, ayant déduit des deux équations

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \sigma P \qquad \text{et} \qquad \frac{dz}{dt} = A\varphi(z) P$$

par l'élimination de P, les deux formules :

$$dv = \frac{\sigma}{A\mu} \frac{dz}{\varphi(z)} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{\sigma}{A\mu} \mathbf{V}_{z_0}^{z}$$

on écrira la troisième équation qui est :

$$P (c - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}} = f\varpi z (c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

sous la forme :

$$\frac{\mu v dv}{10} \frac{(c - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}}{dc} = f\varpi z (c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

d'où :

$$(c' - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}} \frac{dc}{(c - \varpi')^{\frac{\gamma + 1}{2}}} = \frac{10 f\varpi}{\mu} \frac{vdv}{z}.$$

ou encore :

$$(c' - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}} \frac{dc}{(c - \varpi')^{\frac{\gamma + 1}{2}}} = \frac{\mu}{10 f\varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 \mathbf{V}_{z_0}^{z} \frac{dz}{z\varphi(z)}$$

L'intégration donnera :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z}$$

C. Q. F. D.

96. **Le second terme de la série.**— On a trouvé (91), pour l'expression de ce second terme :

$$\mathbf{r}^2\left[\overline{\mathbf{W}}_{z_0}^{z} - \frac{1}{2}\left[\mathbf{W}_{z_0}^{z}\right]^2\right].$$

La fonction $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$ est connue et égale, comme on sait (91), à

$$\mathbf{N} - \mathbf{N}_0 - \mathbf{M}_0(\mathbf{L} - \mathbf{L}_0).$$

Il reste à calculer la fonction

$$\overline{\mathbf{W}}_{z_0}^{z} = \int_{z_0}^{z} \frac{\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^3}{z^2\varphi(z)} dz$$

avec

$$\mathbf{V}_{z_0}^{z} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0.$$

On a donc, en développant le cube :

$$\overline{\mathbf{W}}_{z_0}^{z} = \int_{z_0}^{z} \frac{\mathbf{M}^3(z)}{z^2\varphi(z)} dz - 3\mathbf{M}_0 \int_{z_0}^{z} \frac{\mathbf{M}^2(z)}{z^2\varphi(z)} dz$$
$$+ 3\mathbf{M}_0^2 \int_{z_0}^{z} \frac{\mathbf{M}(z)}{z^2\varphi(z)} dz - \mathbf{M}_0^3 \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2\varphi(z)}.$$

Toutes ces intégrations sont faciles à effectuer numériquement, pour une fonction $\varphi(z)$ quelconque.

On pourra donc dresser une table à double entrée (z et z_0) donnant l'ensemble de la fonction

$$\overline{\mathbf{W}}_{z_0}^{z} - \frac{1}{2}\left[\mathbf{W}_{z_0}^{z}\right]^2$$

qui multiplie le facteur $\mathbf{r}^2$.

Le problème est donc résolu numériquement. On pourrait calculer de même les termes en $\mathbf{r}^3$, $\mathbf{r}^4$... s'il était nécessaire.

Ces calculs n'exigeront que des quadratures de la forme :

$$\int_0^z \frac{\mathbf{M}^n(z)}{z^p \varphi(z)} dz.$$

97. **Développement en séries des fonctions balistiques des poudres.** — On peut avoir besoin de déterminer l'expression des fonctions $\mathbf{V}_{z_0}^{z}$ et $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$, soit dans le voisinage de l'origine c'est-à-dire de $z = z_0$, soit vers la fin de la combustion pour $z = 1$. On y parvient par le développement en série de ces fonctions qu'on opèrera ainsi qu'il suit :

1. *Dérivées des fonctions* **M**, **L** *et* **N**. — On dressera d'abord le tableau suivant :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dz} = \frac{1}{\varphi}. \qquad \frac{d\mathbf{L}}{dz} = \frac{1}{z\varphi}$$

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{dz^2} = -\frac{\varphi'}{\varphi^2} \qquad \frac{d^2\mathbf{L}}{dz^2} = -\frac{\varphi + 2\varphi'}{z^2\varphi^2}$$

$$\frac{d^3\mathbf{M}}{dz^3} = \frac{2\varphi'^2 - \varphi\varphi''}{\varphi^3} \qquad \frac{d^3\mathbf{L}}{dz^3} = \frac{2(\varphi + z\varphi') - z\varphi(2\varphi' + z\varphi'')}{z^2\varphi^3}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dz} = \frac{\mathbf{M}}{z\varphi}$$

$$\frac{d^2\mathbf{N}}{dz^2} = \frac{z - \mathbf{M}(\varphi + z\varphi')}{z^2\varphi^2}$$

$$\frac{d^3\mathbf{N}}{dz^3} = \frac{-3z^2\varphi' - 2z\varphi + \mathbf{M}\left[2(\varphi + z\varphi')^2 - z\varphi(2\varphi' + z\varphi'')\right]}{z^3\varphi^3}$$

2. *Développement au voisinage de l'origine.* — Posons :

$$z = z_0 + (z - z_0)$$

et développons par la formule de Taylor. On aura :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + (z - z_0)\frac{1}{\varphi_0} - \frac{(z-z_0)^2}{1.2}\frac{\varphi_0'}{\varphi_0^2} + \frac{(z-z_0)^3}{1.2.3}\frac{2\varphi_0'^2 - \varphi_0\varphi_0''}{\varphi_0^3} + \dots$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + (z - z_0)\frac{1}{z_0\varphi_0} - \frac{(z-z_0)^2}{1.2}\frac{\varphi_0 + z_0\varphi_0'}{z_0^2\varphi_0^2}$$

$$+ \frac{(z-z_0)^3}{1.2.3}\frac{2(\varphi_0 + z_0\varphi_0')^2 - z_0\varphi_0(2\varphi_0' + z_0\varphi_0'')}{z_0^3\varphi_0^3} + \dots$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + (z - z_0)\frac{\mathbf{M}_0}{z_0\varphi_0} - \frac{(z-z_0)^2}{1.2}\frac{\mathbf{M}_0(\varphi_0 + z_0\varphi_0') - z_0}{z_0^2\varphi_0^2}$$

$$+ \frac{(z-z_0)^3}{1.2.3}\frac{\mathbf{M}_0\left[2(\varphi_0 + z_0\varphi_0')^2 - z_0\varphi_0(2\varphi_0' + z_0\varphi_0'')\right] - 3z_0^2\varphi_0' - 2z_0\varphi_0}{z_0^3\varphi_0^3} + \dots$$

Les fonctions $\mathbf{V}_{z_0}^z$ et $\mathbf{W}_{z_0}^z$ se développeront alors sous la forme

$$\mathbf{V}_{z_0}^z = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 = \frac{z - z_0}{\varphi_0}\left[1 - \frac{z - z_0}{1.2}\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} + \frac{(z-z_0)^2}{1.2.3}\frac{2\varphi_0'^2 - \varphi_0\varphi_0''}{\varphi_0^2} + \dots\right]$$

$$\mathbf{W}_{z_0}^z = \mathbf{N} - \mathbf{N}_0 - \mathbf{M}_0(\mathbf{L} - \mathbf{L}_0) = \frac{(z-z_0)^2}{z_0\varphi_0^2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{z - z_0}{1.2.3}\frac{3z_0\varphi_0' + 2\varphi_0}{z_0\varphi_0} + \dots\right.$$

3° *Développement près du point $z = 1$.*
On écrira, en posant $z = 1 - (1 - z)$

$$\mathbf{V}_{z_0}^z = \mathbf{M}\left(1 - (1 - z)\right) - \mathbf{M}_0$$

$$\mathbf{W}_{z_0}^z = \mathbf{N}\left(1 - (1 - z)\right) - \mathbf{N}_0 - \mathbf{M}_0\left[\mathbf{L}\left(1 - (1 - z)\right) - \mathbf{L}_0\right]$$

et on formera ;

$$\mathbf{M}\big(1-(1-z)\big)=\mathbf{M}_1-\frac{(1-z)}{\varphi_1}-\frac{(1-z)^2}{1.2}\frac{\varphi_1'}{\varphi_2^1}-\frac{(1-z)^3}{1.2.3}\frac{2\varphi_1'^2-\varphi_1\varphi_1''}{\varphi_1^3}+\ldots$$

$$\mathbf{L}\big(1-(1-z)\big)=\mathbf{L}_1-\frac{(1-z)}{\varphi_1}-\frac{(1-z)^2}{1.2}\frac{\varphi_1+\varphi_1'}{\varphi_1^2}-\frac{(1-z)^3}{1.2.3}\frac{2(\varphi_1+\varphi_1')^2-\varphi_1(2\varphi_1'+\varphi_1'')}{\varphi_2^3}+\ldots$$

$$\mathbf{N}\big(1-(1-z)\big)=\mathbf{N}_1-(1-z)\frac{\mathbf{M}_1}{\varphi_1}-\frac{(1-z)^2}{1.2}\frac{\mathbf{M}_1(\varphi_1+\varphi_1')-1}{\varphi_1^2}-\frac{(1-z)^3}{1.2.3}\frac{\big[2(\varphi_1+\varphi_1')^2-\varphi_1(2\varphi_1'+\varphi_1'')\big]-3\varphi_1'-2\varphi_1}{\varphi_3^1}$$

On trouvera alors, pour les formules du développement :

$$\mathbf{V}_{z_0}^{z}=\mathbf{V}_{z_0}^{1}-\frac{1-z}{\varphi_1}-\frac{(1-z)^2}{1.2}\frac{\varphi_1'}{\varphi_1^2}-\ldots$$

$$\mathbf{W}_{z_0}^{z}=\mathbf{W}_{z_0}^{1}-\frac{1-z}{\varphi_1}\mathbf{V}_{z_0}^{1}-\frac{(1-z)^2}{2.2}\frac{(\varphi_1'+\varphi_1)\mathbf{V}_{z_0}^{1}+1}{\varphi_1^2}+\ldots$$

98. **Les cas d'intégration des fonctions balistiques des poudres.**

Fonction $\mathbf{M}(z)$. — Elle est intégrable pour toute valeur de β (poudres dégressives).

On a en effet :

$$\mathbf{M}(z)=\int_0^z\frac{dz}{\varphi(z)}=\int_0^z\frac{dz}{(1-z)^\beta}=\frac{1}{1-\beta}\left[1-(1-z)^{1-\beta}\right]$$

Fonction $\mathbf{N}(z)$.

Elle est intégrable dans trois cas : $\beta=0$; $\beta=\frac{1}{2}$; $\beta=\frac{2}{3}$.

On a, en général :

$$\mathbf{N}(z) = \int_0^z \frac{\mathbf{M}(z)\, dz}{z\varphi(z)}$$

1° Pour $\beta = 0$ (poudres à combustion constante), on a

$$\mathbf{M}(z) = z$$

et par suite

$$\mathbf{N}(z) = z$$

2° Pour $\beta = \frac{1}{2}$ (cordite),

posons :

$$(1 - z) = \cos^2 \psi$$

On aura :

$$dz = z \sin \psi \cos \psi \, d\psi$$

$$\mathbf{M}(z) = 2\int_0^\psi \sin \psi \, d\psi = 2\,(1 - \cos \psi)$$

et par suite :

$$\mathbf{N}(z) = 4\int_0^\psi \frac{(1 - \cos \psi) \sin \psi \cos \psi}{\sin^2 \psi \cos \psi} d\psi = 4\int_0^\psi \frac{\sin \psi}{1 + \cos\psi} d\psi$$

d'où

$$\mathbf{N}(z) = 4 \operatorname{Log}\,(1 + \cos \psi) - 4 \operatorname{Log} 2$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{N}(z) = 4 \operatorname{Log} \frac{1 + \cos \psi}{2}.$$

On pourra encore écrire :

$$z = \sin^2 \psi$$

$$\mathbf{M}(z) = 4 \sin^2 \frac{\psi}{2}; \qquad \mathbf{N}(z) = 8 \operatorname{Log} \cos \frac{\psi}{2}$$

3° Pour $\beta = \frac{2}{3}$ (poudres sphériques ou cubiques), en vue d'intégrer

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{dz}{(1-z)^{\frac{2}{3}}}$$

posons :

$$1 - z = \cos^3 \varphi$$

d'où

$$dz = 3 \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi.$$

et par suite ;

$$\mathbf{M}(z) = 3 \int_0^\varphi \sin \varphi \, d\varphi = 3(1 - \cos \varphi).$$

On aura ensuite, pour $\mathbf{N}(z)$, la formule :

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{\mathbf{M}(z)}{z\varphi(z)} dz = 3 \int_0^\varphi \frac{(1-\cos\varphi)\sin\varphi\cos^2\varphi}{(1-\cos^3\varphi)\cos^2\varphi} d\varphi$$
$$= 9 \int_0^\varphi \frac{d \cos \varphi}{1 + \cos \varphi + \cos^3 \varphi}.$$

Cette équation, en posant

$$y = \cos \varphi - \frac{1}{2}$$

s'intègre par un arc tangente, et on est, en définitive, conduit aux formules :

$$z = 1 - \cos^3 \varphi$$
$$\mathbf{M}(z) = 6 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$
$$\mathbf{N}(z) = 6\sqrt{3}\left[\text{arc tg} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\right) - \text{arc tg} \sqrt{3}\right]$$

C'est dans cette hypothèse, $\beta = \frac{2}{3}$, et avec les formules précédentes que le général Moisson a développé sa théorie des poudres (90).

$$\textit{Fonction } \mathbf{L}(z) = \int_0^z \frac{dz}{z\varphi(z)} = \int_0^z \frac{dz}{z(1-z)^\beta}$$

Elle est intégrable pour $\beta = 0$, sous la forme

$$\mathbf{L}(z) = \operatorname{Log} z,$$

Dans le cas général, en posant

$$1 - z = \sin^2 \xi,$$

on aura :

$$\mathbf{L}(z) = -2\int_0^\xi \frac{\sin^{1-2\beta}\xi}{\cos\xi}\,d\xi$$

qu'on sait intégrer, dans certains cas, par exemple $\beta = \frac{1}{2}$ sous la forme

$$\mathbf{L}(z) = -2 \operatorname{Log} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\xi}{2}\right) + \text{const.}$$

Remarque. — Dans le cas de $\beta = 0$, on a :

$$\mathbf{V}_{z_0}^{z} = z - z_0 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{W}_{z_0}^{z} = z - z_0 - z_0 \operatorname{Log}\frac{z}{z_0}$$

§ 3. — Formules des pressions dans l'ame

99. **Pression en un point.** — 1° Tant que la *poudre n'est pas brûlée totalement*, la pression P au point d'abscisse c dans l'âme, est donnée par la formule (95) :

$$P = f\varpi z \frac{(c' - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}}}{(c - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}}$$

ce qu'on écrira :

$$P = P'z\,\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}$$

On rappelle que :

$$P' = \frac{f\varpi}{c' - \varpi'} = \frac{f\Delta}{1 - \Delta'}$$

est la pression qu'on aurait obtenue à la densité de chargement Δ dans le vase clos constitué par la chambre à poudre.

A cette équation, il faudra joindre la relation qui fait connaitre θ en fonction de z, par l'intermédiaire de la fonction $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$ et qui est :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z}$$

En éliminant le rapport θ entre ces deux relations, on obtiendra la formule faisant connaître P en fonction de z, et qui est :

$$P = P'z\left[1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

2° Il suffira de faire $z = 1$, pour avoir la pression P_1 au point c_1 où finit la combustion.

On a ainsi :

$$P_1 = P'\left(1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

En posant

$$\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{1}$$

il viendra :

$$P_1 = P'\mathbf{s}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

La *division* ρ_1 de l'âme où la pression est P_1 (fin de la

combustion de la poudre) sera obtenue par les deux formules :

$$\theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = s \qquad \text{et} \qquad \theta_1 = \frac{1-\Delta'}{\rho_1-\Delta'}$$

d'où :

$$\rho_1 = \Delta' + \frac{1-\Delta'}{\theta_1}.$$

3° Après la *combustion totale* de la charge, c'est-à-dire en aval du point (P_1, c_1), on a :

$$P(c-\varpi')^\gamma = P_1(c_1-\varpi')^\gamma$$

pour équation de la détente des gaz dans le canon.

Mais cette équation pourra s'écrire :

$$P = P_1\left(\frac{c'-\varpi'}{c_1-\varpi'}\right)^{-\gamma}\left(\frac{c'-\varpi'}{c-\varpi'}\right)^\gamma = P_1\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^\gamma.$$

Or, on a :

$$P_1 = P' s^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}};$$

et :

$$\theta_1 = s^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

il viendra, par suite :

$$P = P' \frac{\theta}{s}^\gamma$$

pour la formule qui fait connaître la pression P en chaque point de l'âme, après la combustion totale de la poudre.

100. **Pression maximum.**

1° *Condition du maximum.* L'équation :

$$P(c-\varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}} = f\varpi z(c'-\varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

où sont variables P, c et z, différentiée logarithmiquement donne :

$$\frac{dP}{P} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{dc}{c - \varpi'} = \frac{dz}{z}.$$

Par suite, la condition analytique qui définit la *pression maximum* et qui se traduit par l'équation $dP = 0$, sera :

$$\frac{\gamma + 1}{2} \frac{dc}{c - \varpi'} = \frac{dz}{z}.$$

Nous désignerons par ζ et χ les valeurs de z et de c, correspondant à la pression maximum P_M.

2° *Première relation entre ζ et χ.* — Nous avons établi (95) en un point quelconque (z, c), l'équation :

$$\frac{\sigma^2}{A^2\mu} \frac{M - M_0}{z\varphi(z)} dz = 10 f\varpi (c' - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}} \frac{dc}{(c - \varpi')^{\frac{\gamma + 1}{2}}}$$

Remplaçant dans cette équation z par ζ, c par χ et

$$\frac{d\zeta}{\zeta} \quad \text{par} \quad \frac{\gamma + 1}{2} \frac{d\chi}{\chi - \varpi'}$$

il viendra :

$$\frac{\sigma^2}{A^2\mu f\varpi} \frac{V_{z_0}^{\zeta}}{\varphi(z)} = \frac{20}{\gamma + 1} \left(\frac{c' - \varpi'}{\chi - \varpi'}\right)^{\frac{\gamma - 1}{2}}$$

ou, en introduisant le paramètre $\mathbf{r}$ et la fonction de détente θ_χ :

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \mathbf{r} \frac{V_{z_0}^{\zeta}}{\varphi(\zeta)} = \theta_\chi^{\frac{\gamma - 1}{2}}$$

3° *Deuxième relation entre ζ et χ.* — La deuxième rela-

tion entre ζ et χ est celle qui, d'une façon générale, existe entre c et z, en chaque point avant la fin de la combustion c'est-à-dire (95).

$$1 - \theta_\chi^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{\zeta}.$$

4° *Troisième relation entre* P_M, ζ et χ. Les deux formules précédentes ayant fait connaître ζ et χ, P_M sera alors donné par la formule du numéro 95 (pression avant la fin de la combustion) :

$$P_M = P'\zeta\theta_\chi^{\frac{\gamma+1}{2}}$$

101. **Transformation des formules.** — 1° Entre la première et la deuxième relation, l'élimination de la fonction θ_χ est immédiate et, on obtiendra une équation ne renfermant plus que la variable ζ. C'est la suivante :

$$\frac{1}{\mathbf{r}} = \mathbf{W}_{z_0}^{\zeta} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\mathbf{V}_{z_0}^{\zeta}}{\varphi(\zeta)}.$$

Le second membre est une fonction des variables ζ et z_0, dont on peut avoir une table à double entrée, calculée une fois pour toutes.

Dans le premier membre, le paramètre $\mathbf{r}$ est fonction de la poudre employée et des conditions de chargement.

On obtient d'ailleurs immédiatement cette formule en partant de la formule de la pression :

$$P = P'z\left[1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

et, en cherchant la condition pour qu'on ait : $\frac{dP}{dz} = 0$.

2. Portant la valeur de $\mathbf{r}$ dans l'une ou l'autre des équations 2 ou 3, on aura θ_χ en fonction de ζ, par la formule :

$$\theta_\chi^{-\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{\varphi(\zeta)}{\mathbf{V}^\zeta_{z_0}}\left[\mathbf{W}^\zeta_{z_0} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\mathbf{V}^\zeta_{z_0}}{\varphi(\zeta)}\right].$$

3. Enfin, la *pression maximum* P_M sera connue en fonction de ζ et z_0 par l'équation :

$$P_M = P'\zeta\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{\varphi(\zeta)}{\mathbf{V}^\zeta_{z_0}}\left(\mathbf{W}^\zeta_{z_0} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\mathbf{V}^\zeta_{z_0}}{\varphi(\zeta)}\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

102. **Résumé des formules de la pression maximum.** — Supposons qu'on ait calculé, une fois pour toutes, au moyen de la fonction $\varphi(z)$ expérimentale, les tables à double entrée des fonctions suivantes :

$$\mathbf{Q}^\zeta_{z_0} = \frac{\mathbf{V}^\zeta_{z_0}}{\varphi(\zeta)} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\mathbf{W}^\zeta_{z_0}$$

$$\mathbf{P}^\zeta_{z_0} = \left[\frac{\varphi(\zeta)\,\mathbf{Q}^\zeta_{z_0}}{\mathbf{V}^\zeta_{z_0}}\right]^{-\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$\mathbf{R}^\zeta_{z_0} = \zeta\left[\frac{\varphi(\zeta)\,\mathbf{Q}^\zeta_{z_0}}{\mathbf{V}^\zeta_{z_0}}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

On obtiendra les éléments (P_M, ζ et χ) du point de pression maximum par les formules :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\frac{1}{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^{\zeta}_{z0}$$

qui fait connaître la *fraction brûlée* ζ au moment du maximum de pression, en fonction des conditions du chargement; car on a, pour le paramètre $\mathbf{r}$, la valeur :

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2}\frac{\mu}{10 f\varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2.$$

$$\theta_{\chi}^{-1} = \frac{\chi - \varpi'}{c' - \varpi'} = \mathbf{P}^{\zeta}_{z0}$$

qui fait connaître la *division* χ de l'âme où se produit le maximum.

$$P_M = P'\mathbf{R}^{\zeta}_{z0}$$

qui fait connaître la *pression maximum* P_M, en fonction de la pression en vase clos :

$$P' = \frac{f\varpi}{c' - \varpi'}.$$

§ 4. — Le mouvement du projectile après la combustion

103. **Formule de la vitesse.** — Après la fin de la combustion de la poudre, la pression P au point c, est reliée à la pression P_1 et à l'abscisse c_1, où finit la combustion, par la formule de la détente adiabatique :

$$P(c - \varpi')^{\gamma} = P_1(c_1 - \varpi')^{\gamma}$$

qu'on a transformée, au n° 99,3°, en la suivante :

$$P = P'\frac{\theta^{\gamma}}{s}$$

ou bien :

$$P(c - \varpi')^{\gamma} = \frac{P'(c' - \varpi')^{\gamma}}{s} = k.$$

L'équation $P(c - \varpi')^{\gamma} = k$, jointe à l'équation du mouvement :

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pi a^2}{4} P,$$

se transforme, par un calcul analogue à celui fait au n° 95 en :

$$\mu v dv = 10k \frac{dc}{(c - \varpi')^{\gamma}}$$

et l'intégrale en est, du point (v, c) au point (V_1, c_1) :

$$\frac{1}{2}\mu(v^2 - V_1^2) = \frac{10}{\gamma - 1} \frac{k}{(c_1 - \varpi')^{\gamma-1}}\left[1 - \left(\frac{c_1 - \varpi'}{c' - \varpi'}\right)^{\gamma-1}\right]$$

qu'on écrira, en remplaçant k par sa valeur,

$$\frac{f\varpi}{s}(c' - \varpi')^{\gamma-1}$$

sous la forme :

$$\frac{1}{2}\mu(v^2 - V_1^2) = \frac{10}{\gamma-1}\frac{f\varpi}{s}\left(\frac{c' - \varpi'}{c_1 - \varpi'}\right)^{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{c_1 - \varpi'}{c' - \varpi'}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{\gamma-1}\right]$$

$$= \frac{10}{\gamma - 1}\frac{f\varpi}{s}\,\theta_1^{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Mais, on a trouvé (99) :

$$\theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = s.$$

Par suite, il viendra :

$$\frac{1}{2}\mu(v^2 - V_1^2) = \frac{10 f \varpi}{\gamma - 1}\left[\mathbf{s} - \frac{\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}}\right]$$

avec, comme on sait :

$$\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\theta = \frac{1 - \Delta'}{\rho - \Delta'} = \frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}.$$

C'est l'équation cherchée qui fait connaître la vitesse v au point défini par son abscisse c ou par la variable ρ.

Il y entre, outre le paramètre $\mathbf{s}$, la vitesse V_1 de *stricte combustion* donnée par la formule :

$$V_1 = \frac{\sigma}{A\mu}\mathbf{V}_{z_0}^{\frac{1}{2}}.$$

104. **Vitesse initiale.** — Si le volume total de l'âme est C, auquel cas la variable ρ devient $\mathfrak{P}$ et la fonction θ devient Θ, on aura la vitesse initiale par la formule :

$$V_0^2 = V_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1}\,\frac{10 f \varpi}{\mu}\left[\mathbf{s} - \frac{\Theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}}\right].$$

§ 5. — Formules du temps

105. **Temps avant la fin de la combustion.** — On a (85) :

$$dx = vdt \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi a^2}{4}x = 10(c - c')$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\pi a^2}{4}vdt = 10dc \qquad \text{ou} \qquad \sigma vdt = 10dc.$$

Remplaçant, dans cette équation, v par sa valeur en fonction de z, c'est à-dire prenant :

$$v = \frac{\sigma}{\mu A} \mathbf{V}_{z_0}^{z},$$

on aura :

$$dt = \frac{10}{\sigma^2} \mu A \frac{dc}{\mathbf{V}_{z_0}^{z}}.$$

D'autre part, dc s'exprime en fonction de z et de $c - \varpi'$ par la formule (95) :

$$10 f \varpi (c' - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}} \frac{dc}{(c - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}}} = \frac{\sigma^2}{A^2 \mu} \frac{\mathbf{V}_{z_0}^{z}}{z \varphi(z)} dz.$$

On aura donc ;

$$dt = \frac{c' - \varpi'}{A f \varpi} \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'} \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{dz}{z \varphi(z)}.$$

Mais, on a (95) :

$$1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \mathbf{r} \mathbf{W}_{z_0}^{z}.$$

Tirant la valeur de $\frac{c - \varpi'}{c' - \varpi'}$ et la portant dans l'expression de dt, celle-ci deviendra :

$$\frac{A f \varpi}{c' - \varpi'} dt = (1 - \mathbf{r} \mathbf{W}_{z_0}^{z})^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{dz}{z \varphi(z)}$$

et, en intégrant, le temps t, compté depuis le démarrage z_0, sera donné par la formule ;

$$AP't = \int_{z_0}^{z} (1 - \mathbf{r} \mathbf{W}_{z_0}^{z})^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{dz}{z \varphi(z)} ;$$

t est ainsi donné par une intégrale fonction des trois lettres z, z_0 et $\mathbf{r}$.

Pour arriver à une formule simple, on développera le binôme, de sorte qu'on aura :

$$AP't = \mathbf{L}(z) - \mathbf{L}(z_0) + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\mathbf{r}\int_{z_0}^{z}\mathbf{W}_{z_0}^{z}\frac{dz}{z\varphi(z)} + \dots$$

L'intégrale $\mathbf{L}(z)$ est celle qui a déjà été rencontrée précédemment (92) et qui, dans la théorie de la combustion en vase clos, n'est autre que l'intégrale $\mathbf{L}_\alpha(z)$ pour $\alpha = 1$ (30). Si on remarque que P' est la pression qu'on aurait eu en vase clos, dans le tir avec la charge ϖ, si le projectile n'avait pas bougé, on peut énoncer le théorème suivant :

En première approximation, au bout du temps t, la fraction de poudre brûlée dans le canon est la même qu'en vase clos. En particulier, *la durée totale t_1 de la combustion de la poudre est la même dans le canon que dans la bombe.*

On saura d'ailleurs calculer les termes successifs de la série qui donne le temps t et qui sont des fonctions de z et de z_0.

106. Temps après la fin de la combustion. — L'équation de la vitesse après combustion complète (103)

$$v^2 = V_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}\frac{10f\varpi}{\mu}\left[\mathbf{s} - \frac{\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}}\right]$$

pourra s'écrire :

$$v^2 = V_1^2\left[1 + \frac{2}{\gamma-1}\frac{10f\varpi}{\mu}\frac{\mathbf{s}}{V_1^2}\right]\left[1 - \frac{\frac{2}{\gamma-1}\frac{10f\varpi}{\mu}\frac{1}{V_1^2\mathbf{s}}}{1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{10f\varpi}{\mu}\frac{\mathbf{s}}{V_1^2}}\theta^{\gamma-1}\right]$$

ou bien, en introduisant les paramètres **r** et **s** :

$$v^2 = \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 [\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}_{z_0}]^2 \left(1 + \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{r}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}_{z_0}}\right)\left[1 - \frac{\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+\mathbf{r}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}_{z_0})}\right].$$

Posant :

$$H^2 = \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 [\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}_{z_0}]^2 \left(1 + \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{r}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}_{z_0}}\right)$$

et

$$h^{\gamma-1} = \frac{1}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+\mathbf{r}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}_{z_0})}$$

il viendra :

$$v^2 = H^2(1 - h^{\gamma-1}\,\theta^{\gamma-1}).$$

Remplaçant v par :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{\sigma}\frac{dc}{dt}$$

et θ par $\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}$ on écrira :

$$\frac{10}{\sigma}\frac{dc}{dt} = H\left[1 - h^{\gamma-1}\left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{\gamma-1}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, le temps t sera donné par la formule :

$$t = \frac{10}{\sigma H}\int_{c_1}^{c} \frac{dc}{\left[1 - h^{\gamma-1}\left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{\gamma-1}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

en intégrant du point c au point c_1, où a fini la combustion de la poudre.

On trouve là une équation analogue à celle rencontrée dans le problème du *tracé des rayures* (66) et on la résoudra de la même façon.

On posera

$$\left(h \frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{\gamma - 1} = \cos^2 \psi$$

d'où on déduit

$$\left[1 - \left(h \frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{\gamma - 1}\right]^{\frac{1}{2}} = \sin \psi$$

et

$$dc = \frac{2}{\gamma - 1} h (c' - \varpi') \frac{\sin \psi}{\cos^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \psi} d\psi.$$

On aura ainsi

$$t = \frac{10}{\sigma H} \frac{2h}{\gamma - 1} (c' - \varpi') \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \psi}.$$

La limite inférieure ψ_0 sera telle que

$$h^{\gamma-1} \left(\frac{c' - \varpi'}{c_1 - \varpi'}\right)^{\gamma - 1} = \cos^2 \psi_1$$

ce qui, en vertu de la relation $\theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{s}$, (99) peut encore s'écrire

$$h^{\gamma-1} \mathbf{s}^2 = \cos^2 \psi_1.$$

Si, pour intégrer, on pose $\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = m + 1$ on aura

$$t = \frac{10}{\sigma H} \frac{2}{\gamma - 1} h (c' - \varpi') \left[\xi_m (\psi) - \xi_m (\psi_1)\right]$$

$\xi_m(\psi)$ étant la fonction considérée en Balistique Extérieure dans la théorie d'Euler[1].

Le problème est donc résolu par l'équation ci-dessus où on remplacera H et h par leurs valeurs en fonction des paramètres du chargement.

§ 6.— Résumé des formules de la Balistique Intérieure. Poudre quelconque

107. Notations.

1° z, *fraction de poudre brûlée* au temps t,
ϖ, *poids* de la charge en kilogrammes.

2° f, *force* de la poudre (kilogrammes par centimètre carré),
A, *vivacité* de la poudre,
η, *covolume*[2],
$\varpi' = \eta\varpi$,
$\varphi(z)$, *fonction de forme*,
γ, *exposant* expérimental de détente.

3° c, *volume* de l'âme en décimètres cubes,
C, *volume total* de l'âme en décimètres cubes,
c', *volume* de la chambre à poudre en décimètres,
$\Delta = \frac{\varpi'}{c'}$, *densité de chargement*,
$\rho = \frac{c}{c'}$, *division de l'âme*.
$q = \frac{C}{c'}$, *division totale de l'âme*,

[1] Ch. 5, p. 325.
[2] Pour les poudres à la nitrocellulose pure, on a $\eta = 1$.

a, *diamètre* de l'âme rayée en centimètres,

$\sigma = \frac{\pi a^2}{4}$, *section droite* de l'âme en centimètres carrés.

4° $\mu = i\frac{p + \vartheta\varpi}{g}$,

i, *caractéristique* du canon,

p, *poids* du projectile en kilogrammes,

ϑ, *coefficient* pris égal à $\frac{1}{2}$ ordinairement,

g, *gravité* $= 9{,}81$,

5° P′, *pression en vase clos* : $P' = \frac{f\varpi}{c' - \varpi'} = \frac{f\Delta}{1 - \Delta'}$,

P_0, *pression de forcement*,

z_0, *fraction de forcement* : $z_0 = \frac{P_0}{P'}$.

6° v, *vitesse* du projectile en mètres, en un point c ou ρ de l'âme,

P, *pression* moyenne de la poudre dans l'âme, au même point, en kilogrammes par centimètre carré.

108. **Equations différentielles du mouvement.**

(1) $$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pi a^2}{4}P$$

(2) $$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z)P$$

(3) $$P(c - \varpi') + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{\mu v^2}{10} = f\varpi z.$$

109. **Fonctions auxiliaires.**

1° *Fonctions balistiques des poudres* (1er terme de la série).

a) *Fonctions primaires* :

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{dz}{\varphi(z)}; \quad \mathbf{L}(z) = \int_0^z \frac{dz}{z\varphi(z)}; \quad \mathbf{N}(z) = \int_0^z \frac{\mathbf{M}dz}{z\varphi(z)}.$$

b) *Fonctions secondaires* :

$$\mathbf{V}_{z_0}^{z} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0$$
$$\mathbf{W}_{z_0}^{z} = \mathbf{N} - \mathbf{N}_0 - \mathbf{M}_0(\mathbf{L} - \mathbf{L}_0).$$

2° *Paramètres du chargement* :

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2$$
$$\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{1}.$$

3° *Fonction de détente* :

$$\theta = \frac{1 - \Delta'}{\rho - \Delta'} = \frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}$$

pour un point quelconque ;

$$\Theta = \frac{1 - \Delta'}{q - \Delta'} = \frac{c' - \varpi'}{C - \varpi'}$$

à la bouche du canon.

210. Formules de la vitesse et de la pression.

Premier cas. — La poudre n'est pas complètement brûlée :

a) en un point quelconque :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z}$$

qui fait connaître la fraction brûlée au point θ ou ρ.

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} \mathbf{V}_{z_0}^{z}$$

qui fait connaître la vitesse v au point θ ou ρ.

$$P = P'z\left[1 - \mathbf{rW}^{z}_{z_0}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$ qui fait connaître la pression P au point θ ou ρ.

b) à la bouche du canon :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{rW}^{z}_{z_0}$$ qui fait connaître la fraction brûlée z à la bouche, au point θ ou ꝗ.

$$V_0 = \frac{\sigma}{A\mu}\mathbf{V}^{z}_{z_0}$$ qui fait connaître la vitesse initiale V_0 à la bouche au point θ ou ꝗ.

$$P_B = P'z\left[1 - \mathbf{rW}^{z}_{z_0}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$ qui fait connaître la pression P_B au point θ ou ꝗ.

Fin de la combustion de la poudre :

$$V_1 = \frac{\sigma}{A\mu}\mathbf{V}^{1}_{z_0}$$ qui fait connaître la *vitesse* V_1 à la fin de la combustion.

$$\theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{s}.$$ qui fait connaître la *division* ρ_1 de l'âme à la fin de la combustion.

$$P_1 = P'\mathbf{s}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$ qui fait connaître la *pression* P_1 dans l'âme à la fin de la combustion.

Deuxième cas. — La poudre est complètement brûlée :

a) en un point quelconque :

$$v^2 = V_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}\frac{10f\varpi}{\mu}\left[\mathbf{s} - \frac{\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}}\right]$$ qui fait connaître la vitesse v au point défini par la valeur θ ou ρ.

$$P = P'\frac{\theta^{\gamma}}{\mathbf{s}}$$ qui fait connaître la pression P.

b) à la bouche du canon :

$$V_0^2 = V_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1}\,\frac{10 f \varpi}{\mu}\left[\mathbf{s} - \frac{\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}}\right]$$ qui fait connaître la vitesse V_0 au point θ ou $\mathfrak{q}$.

$$P_B = P' \frac{\theta^\gamma}{\mathbf{s}}$$ qui fait connaître la pression à la bouche.

III. Formules de la pression maximum.

1° P_M, *pression maximum*,
γ, *division* de l'âme où se produit le maximum,
ζ, *fraction brûlée* au moment du maximum.

2° *Fonctions secondaires de la pression maximum.*

$$\mathbf{Q}_{z_0}^{\zeta} = \frac{\mathbf{V}_{z_0}^{\zeta}}{\varphi(\zeta)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\mathbf{W}_{z_0}^{\zeta}$$

$$\mathbf{P}_{z_0}^{\zeta} = \left[\frac{\varphi(\zeta)\,\mathbf{Q}_{z_0}^{\zeta}}{\mathbf{V}_{z_0}^{\zeta}}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$\mathbf{R}_{z_0}^{\zeta} = \zeta\left[\frac{\varphi(\zeta)\,\mathbf{Q}_{z_0}^{\zeta}}{\mathbf{V}_{z_0}^{\zeta}}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

3° *Formules* :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\frac{1}{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}_{z_0}^{\zeta}$$

$$\frac{\chi - \varpi'}{c' - \varpi'} = \mathbf{P}_{z_0}^{\zeta} \quad \text{ou} \quad \frac{\chi - \varpi'}{c' - \varpi'} = \left[\frac{1}{1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{\zeta}}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}.$$

$$P_M = P'\mathbf{R}_{z_0}^{\zeta} \quad \text{ou} \quad P_M = P'\zeta\left[1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{\zeta}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

§ 7. — Sur une autre forme de la solution

112. **Epaisseur brûlée prise comme variable.** — Si, au lieu de considérer la *fonction de forme* d'une charge de poudre comme représentant une loi *physique* de la combustion des poudres, on se bornait à l'emprunter à la géométrie (13), on serait conduit tout naturellement (vu l'hypothèse de la combustion par tranches parallèles d'un brin ou d'une charge) à prendre, comme variable, l'épaisseur brûlée à chaque instant. C'est cette manière de poser le problème qui, dans certains cas particuliers, a été adoptée par la plupart des auteurs d'ouvrages sur la Balistique Intérieure.

La traduction de cette loi sera que la vitesse de combustion $\frac{de}{dt}$ perpendiculaire à une face quelconque du brin est proportionnelle à la pression.

On posera donc :

$$\frac{de}{dt} = BP,$$

B étant une constante.

113. **Intégrale de la vitesse.** — La seconde équation différentielle du mouvement est la loi d'inertie que traduit l'équation :

$$\mu \frac{dv}{dt} = \sigma P$$

On éliminera P entre ces deux équations, et on aura :

$$de = B \frac{\mu}{\sigma} dv.$$

En supposant qu'il a fallu une certaine épaisseur e_0 brûlée avant le démarrage, on intégrera par la formule :

$$e = e_0 + B \frac{\mu}{\sigma} v.$$

Si on suppose $e_0 = 0$, on aura le théorème suivant dû à MM. Sébert et Hugoniot[1].

[1] Sébert et Hugoniot, p. 196.

La vitesse du projectile avant la fin de la combustion de la poudre est proportionnelle à l'épaisseur brûlée.

114. **Intégrale de l'espace.** — La géométrie permet, pour chaque forme de poudre, d'exprimer la *fraction brûlée* z en fonction de l'épaisseur brûlée e, par une fonction $z = \psi(e)$.

La troisième équation différentielle devient alors :

$$P(c - \varpi') + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu v^2}{10} = f\varpi\psi(e)$$

qu'on transformera aisément en la suivante :

$$\frac{dc}{c - \varpi'} = \frac{\mu v dv}{10 f\varpi\psi(e) - \frac{\gamma - 1}{2} v^2}$$

et l'intégrale, en remplaçant v et dv par leurs valeurs en fonction de e et de e_0, sera :

$$-\frac{\gamma - 1}{2} \operatorname{Log} \theta = \mathbf{r} \int_{e_0}^{e} \frac{e - e_0}{\psi(e)} \frac{de}{1 - \mathbf{r} \frac{(e - e_0)^2}{\psi(e)}}$$

en posant :

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f\varpi} \left(\frac{\sigma}{B\mu}\right)^2.$$

On pourrait donc, avec le même développement en série qu'au n° 91, arriver à un système de formules très analogue et ayant, ainsi, la même généralité. Dans ce système les trois équations différentielles seraient :

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \sigma P, \qquad \frac{de}{dt} = BP,$$

$$P(c - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}} = f\varpi\psi(e)\,(c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

Mais, au point de vue physique, la fonction $\psi(e)$ ne présente pas la même signification simple que la fonction $\varphi(z)$, ni la même souplesse, ni les mêmes facilités de détermination expérimentale.

115. **Travaux divers sur cette méthode.** — Les auteurs qui ont abordé le problème de la Balistique Intérieure par cette voie, n'ont point, en général, suivi la méthode qui vient d'être indiquée et qui laisserait arbitraire, dans l'intégrale, la fonction $\psi(e)$, ni employé le développement en série que nous avons utilisé. Ils supposent d'abord $e_0 = 0$; puis ils particularisent la fonction $\psi(e)$ sous la forme, en général, d'un polynôme du troisième degré

$$\psi(e) = me + ne^2 + qe^3,$$

avec des valeurs des coefficients m, n, q, que la géométrie peut calculer suivant la forme des poudres (13).

On a alors à intégrer une équation de la forme :

$$\int_0^e \frac{de}{m + (n - \mathbf{1})\, e + qe^2}$$

qui est réductible à un logarithme si les racines du trinôme sont réelles, à un arc tangente si les racines sont imaginaires.

Telle est la méthode qui a été introduite par le général Sébert et le capitaine Hugoniot pour la solution du problème de la Balistique Intérieure.

Associée à l'hypothèse simplificative du général Moisson (loi de Mariotte pour la détente), elle constitue également la base des calculs dans le Traité de Balistique Intérieure du colonel Mata.

Dans le Traité du capitaine Hœsen, la fonction $\psi(e)$ est conservée sous forme symbolique dans les calculs ; mais sa détermination pratique est demandée à la géométrie ; de plus, la troisième équation différentielle est prise, (hypothèse que le général Moisson avait déjà examinée) sous la forme

$$P(c - \varpi')^\gamma = f\varpi\psi(e)\,(c' - \varpi')^{\gamma - 1}$$

ce qui ne s'identifie pas avec le développement en série du n° 95 et ne permet pas de ramener les hypothèses de l'auteur à l'équation de la conservation de l'énergie que traduit l'équation de M. Résal (83).

CHAPITRE VI

LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA BALISTIQUE INTÉRIEURE

§ I. — Les problèmes caractéristiques

116. **Objet du présent chapitre.** — Nous nous proposons de discuter, dans ce chapitre, sous forme de théorèmes généraux, les lois principales du mouvement du projectile le long de l'âme du canon.

1° Avant la fin de la combustion de la poudre, les 3 équations :

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = P \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = A\varphi(z)\, P\,;$$

$$P(c - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}} = f\varpi z(c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

constituent les formules sous lesquelles, avec les restrictions énoncées (premier terme de la série seul conservé), on peut mettre les lois élémentaires du mouvement.

2° Après la combustion totale de la poudre qui finit au point (P_1, c_1) on sait que les deux seules équations qui subsistent sont :

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = P$$

$$P(c - \varpi')^{\gamma} = P_1(c_1 - \varpi')^{\gamma}$$

117. **Problèmes traités.** — Nous supposons que, dans les formules des poudres, la *force* f est une caractéristique constante pour un genre de poudre déterminé (nitrocellulose, Poudre B, balistite, cordite, etc.)

Les poudres d'un genre donné se différencient par leur *espèce*, analytiquement représenté par leur *fonction de forme* $\varphi(z)$ et leur *variété* que définit la *vivacité* A.

Dans les formules de la Balistique Intérieure (où on supposera dès lors f et $\varphi(z)$ constants), figurent comme quantités susceptibles de variations, les suivantes :

la *vivacité* A ;

le *poids de la charge* ϖ ;

le *poids du projectile* p ;

la *pression de forcement* P_0 ;

le *volume de la chambre à poudre* c'.

Le *volume de l'âme* c ne doit pas figurer dans ce tableau, puisque c'est la variable indépendante, relativement à laquelle nous étudierons, en général, les variations des deux inconnues caractéristiques du mouvement, la pression P et la vitesse v. Le *volume* c sera donc susceptible de varier depuis $c = c'$, origine des rayures, jusqu'à $l'\infty$.

Les *problèmes caractéristiques* de la Balistique Intérieure seront ainsi au nombre de cinq, en ne faisant varier, à la fois, qu'une des cinq quantités :

$$A,\ \varpi,\ p,\ P_0 \text{ et } c'$$

dont les deux premières appartiennent à la poudre, la troisième au projectile, la quatrième au projectile et au canon, et la cinquième au canon. Cette liste sera la division des paragraphes du présent chapitre.

En dehors de ces problèmes simples, où varie un élément caractéristique du mouvement, il existe une infinité de problèmes où l'énoncé renfermera une combinaison plus ou moins compliquée des données initiales. On pourrait, par exemple, étudier le tir à *pression maximum constante*, le tir à *vitesse initiale constante* (C donné), le tir à *force vive initiale* (pV_0^2) constante etc., etc.

Mais, ces problèmes exigent la connaissance des formules explicites du mouvement, et se résolvent par des opérations algébriques plus ou moins compliquées, au contraire des problèmes dits *caractéristiques* dont l'étude peut être faite d'une manière très générale, et, en grande partie, avec les seules équations différentielles.

Mais, avant d'aborder la discussion des problèmes *caractéristiques*, nous donnerons trois théorèmes généraux relatifs à la manière dont certaines constantes sont engagées dans les équations.

118. **Théorème I.** — *Les formules des vitesses, avant et après combustion, les formules des pressions dans l'âme restent les mêmes quand on change* f *en* kf, A *en* $\frac{A}{k}$, μ *en* $k\mu$ et P_0 *en* kP_0.

En effet :

1° L'expression du paramètre **r**

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\sigma^2}{\varpi f A^2 \mu}$$

renferme, au dénominateur, le produit :

$$f A^2 \mu$$

qui reste invariable dans les conditions de l'énoncé.

2° Avant la fin de la combustion, l'expression

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} \mathbf{V}_{z_0}^{z}$$

ne change pas, puisque le produit $A\mu$ reste invariable, et l'autre formule :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z}$$

ne renferme, comme paramètre, que $\mathbf{r}$ qui reste invariable.

D'ailleurs, z_0 reste le même, étant donné par la formule $z_0 = \frac{P_0}{P'}$.

3° Après la fin de la combustion, dans la formule :

$$v_2 = V_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \left[\mathbf{s} - \frac{\theta^{\gamma - 1}}{\mathbf{s}} \right]$$

V_1^2 reste invariable, comme ne renfermant que le produit $A\mu$; $\frac{f}{\mu}$ est constant, ainsi que :

$$\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{1}.$$

4° Quant aux formules des pressions, elles ne renferment que les deux paramètres $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ qui ne varient pas. Le théorème est donc complètement démontré.

119. **Théorème II.** — *Les fonctions suivantes sont des invariants de la vitesse.*

1° *Avant la fin de la combustion :*

$$\mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z} + \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{1} + \theta_1^{\frac{\gamma - 1}{2}}$$

$$\frac{v}{\mathbf{V}_{z_0}^{z}} = \frac{V_1}{\mathbf{V}_{z_0}^{1}},$$

2° *Après la fin de la combustion :*

$$v^2 + \frac{20}{\gamma - 1} \frac{f\varpi}{\mu} \frac{\theta^{\gamma-1}}{s} = V_1^2 + \frac{20}{\gamma - 1} \frac{f\varpi}{\mu} \frac{\theta_1^{\gamma-1}}{s}.$$

120. **Théorème III.— Similitude des bouches à feu.** *Deux bouches à feu semblables et semblablement chargées, ont, en prenant pour abscisse le rapport* ρ, *division de l'âme, même courbe des pressions et même courbe des vitesses, si 1° les pressions de forcement* P_0 *sont égales, 2° les vivacités* A *sont en raison inverse des calibres.*

(On suppose le *genre* f et *l'espèce* $\varphi(z)$ de la poudre, les mêmes pour les deux bouches à feu).

1° La similitude supposée des bouches à feu, exige que, a étant le calibre de la première, et ha celui de la seconde, on remplace dans les formules la *section droite* σ par $h^2\sigma$, les *volumes* c et c' par h^3c et h^3c'.

La similitude du chargement exige que μ soit remplacé par $h^3\mu$ et ϖ par $h^3\varpi$.

D'une part, si P_0 est la pression commune de forcement, on a par définition $z_0 = \frac{P_0}{P'}$ avec $P' = f\frac{\varpi}{c' - \varpi'}$ et comme P' est une constante quand ϖ devient $h^3\varpi'$ et que c' devient h^3c', il en résulte que z_0 est la même fraction pour les deux bouches à feu.

D'autre part, le *paramètre*

$$r = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10f\varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2$$

restera le même dans les deux bouches à feu, quand on remplacera μ par $h^2\mu$, σ par $h^2\sigma$ et ϖ par $h^3\varpi$, si le produit Aa est une constante.

2° Ceci posé, la formule de la vitesse avant la fin de la combustion

$$v = \frac{\sigma}{A\mu}\, \mathbf{V}_{z_0}^{z}$$

montre que, pour le même z, et d'après ce qui a été démontré, le même z_0, les vitesses sont les mêmes.

L'autre formule

$$1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z}$$

montre que, pour les mêmes z et z_0, les valeurs de ρ sont aussi les mêmes, c'est-à-dire que la vitesse v correspond, dans les deux bouches à feu, à la même *division* ρ de l'âme.

Après la fin de la combustion, la proposition est également exacte, le *paramètre* $\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{1}$ restant le même dans les deux bouches à feu.

Les courbes des vitesses sont donc les mêmes si on prend pour abscisses les *divisions* ρ de l'âme.

La démonstration est aussi facile pour les pressions : en particulier le maximum de pression est le même pour les deux canons.

3° Ce théorème montre comment un système complet d'artillerie navale, depuis les canons-révolvers jusqu'aux pièces en tourelles, peut être défini, ainsi que cela a lieu quelquefois en pratique, par la désignation du nombre de calibres de la longueur d'âme $\left(\frac{C}{\tau}\right.$ exprimé en calibres$\left.\right)$ (artillerie de 30, 45, 50 calibres).

En joignant à cette désignation une autre caractéristique (le plus souvent omise d'ailleurs), et compatible avec

la similitude, telle que *artillerie de puissance maximum*, ou *artillerie tirant à une densité de chargement donnée*, etc., on connaîtra toutes les propriétés balistiques du système par l'étude d'un seul canon ; les autres canons se déduiront du premier, en ce qui concerne leurs dispositions intérieures et leur chargement, par la loi de la similitude mécanique indiquée ci-dessus ; la poudre à employer aura une *vivacité* A, inversement proportionnelle au calibre.

D'après la définition géométrique, ou plutôt l'interprétation géométrique qu'on peut donner de la *vivacité* A (18), on sait que, pour les poudres plates, la *vivacité* A est sensiblement en raison inverse de l'épaisseur du brin de poudre.

Par suite, la loi de similitude se complètera, en interprétant géométriquement la condition de similitude des poudres, et en disant que l'épaisseur de la poudre devra être proportionnelle au calibre.

Ainsi, un système d'artillerie allant du calibre de 5 centimètres au calibre de 30 centimètres exigera des poudres dont la *vivacité* A décroisse dans le rapport de 6 à 1, c'est-à-dire dont l'épaisseur varie de 1 à 6.

§ 2. — Le tir a poudre variable (A variable)

121. **Hypothèses.** — Nous supposons, dans cette étude, qu'avec un *canon* donné (a, c') on tire un *projectile* déterminé (p, z_0) avec une *charge* unique (f, ϖ), mais avec des poudres ($\varphi(z)$ constant) de *vivacité* A différentes ; nous nous proposons d'étudier, le long de l'âme, c'est-à-dire le long de la variable c, la loi du déplacement du projectile. La variable c pourra donc prendre toutes les valeurs de-

puis $c = c'$, position initiale du projectile à l'origine des rayures, jusqu'à $c = \infty$.

D'autre part, la *vivacité* A pourra prendre toutes les valeurs qu'on voudra.

La connaissance du mouvement sera complète si, d'une part, on sait déterminer en chaque point ou à chaque instant 1° la *force motrice*, c'est-à-dire les courbes des pressions dans l'âme (P, c) et (P, t) et 2° les *vitesses* successives du projectile, soit, par exemple, la courbe (v^2, c).

C'est cette étude qui va faire l'objet des développements de ce paragraphe.

122. **La courbe** (P, c). — La courbe (P, c) des pressions dans l'âme en fonction des espaces parcourus par le projectile est de première importance. Elle est, en effet, le point de départ nécessaire pour le tracé rationnel du canon et le calcul de sa résistance transversale.

Les formules du n° 110 permettront toujours le tracé, point par point, de cette courbe, dont la théorie qui va suivre indiquera les propriétés générales et les points remarquables.

1° *La courbe des pressions adiabatiques* γ. — Si on suppose la poudre complètement brûlée avant le départ du projectile, la pression initiale P′ dans la chambre est donnée par la formule de Noble et Abel :

$$P' = \frac{f\varpi}{c' - \varpi'}.$$

La détente se fait par hypothèse (45), suivant une loi adiabatique définie par l'*exposant expérimental* γ et est représentée par l'équation :

$$P(c - \varpi')^{\gamma} = f\varpi(c' - \varpi')^{\gamma - 1},$$

ce qu'on peut écrire encore :

$$P(c - \varpi')^\gamma = P'(c' - \varpi')^\gamma$$

ou :

$$P = P'\theta^\gamma.$$

La courbe représentative est une sorte d'hyperbole dont les asymptotes sont l'axe des c d'une part, la verticale $c = \varpi'$ de l'autre.

En un point quelconque, la tangente à cette courbe est définie par la relation :

$$\frac{dP}{dc} + \gamma \frac{P}{c - \varpi'} = 0,$$

ce qui, pour le point de départ, donne :

$$\left(\frac{dP}{dc}\right)_0 = - \gamma \frac{P'}{c' - \varpi'}.$$

L'aire comprise entre l'axe des c et la courbe, représente, pour une valeur donnée de c, le travail accompli, dont l'expression, d'autre part, serait $\frac{1}{2} \mu u^2$, u étant la vitesse du projectile dans l'hypothèse d'une combustion instantanée de la poudre ($A = \infty$).

On a d'ailleurs (45) :

$$\frac{1}{2} \mu u^2 = \frac{1}{\gamma - 1} 10 f\varpi (1 - \theta^{\gamma - 1}),$$

et le travail total, pour $c = \infty$, serait donné par la formule :

$$\frac{1}{2} \mu U^2 = \frac{10 f\varpi}{\gamma - 1}.$$

C'est l'*aire* totale comprise entre la courbe et l'axe des c.

2° *La courbe des pressions de stricte combustion.* — C'est la courbe définie par la relation :

$$P(c - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}} = f\varpi(c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

ou :

$$P = P'\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Elle est le lieu, pour toutes les poudres (A *variant,* ϖ *constant*), *des points où cesse la combustion de la poudre.*

Elle part du même point (P', c') que la courbe des pressions adiabatiques et sa tangente qui, en un point quelconque, est donnée par la formule :

$$\frac{dP}{dc} + \frac{\gamma+1}{2}\frac{P}{c - \varpi'} = 0$$

prend, à l'origine, la valeur :

$$\left(\frac{dP}{dc}\right)_0 = -\frac{\gamma+1}{2}\frac{P'}{c' - \varpi'}.$$

Elle est constamment *au-dessus* de la courbe des pressions adiabatiques.

La vitesse w que le projectile acquerrait au point c, si la détente des gaz suivait cette loi serait :

$$\frac{1}{2}\mu w^2 = \frac{2}{\gamma - 1} 10 f\varpi\left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right).$$

Le travail total, pour un parcours infini, serait donc le double du travail total trouvé dans le cas de la détente adiabatique γ ; entre la vitesse U et la vitesse W correspondant à $c = \infty$, on a la relation $W = U\sqrt{2}$.

3° *L'origine de la courbe* (P, c). — Ceci posé, passons à

l'étude de la courbe (P, c) d'une poudre quelconque qui répond (avant la fin de la combustion) à l'équation :

$$P(c - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}} = f\varpi(c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}} z,$$

ou :

$$P = P' z \theta^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

La courbe, pour l'origine ($c = c'$), part d'un certain point P_0, qui est la *pression de forcement*, caractéristique du tracé du cône de raccordement du canon et du montage des ceintures du projectile. A cette pression P_0, correspond une valeur z_0, *fraction de forcement*, telle que

$$z_0 = \frac{P_0}{P'}.$$

En un point quelconque de la courbe (P, c), on a :

$$\frac{dP}{dc} + \frac{\gamma+1}{2} \frac{P}{c' - \varpi'} = \frac{P}{z} \frac{dz}{dc}.$$

Mais on a :

$$\frac{dz}{dc} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dc} = \frac{10}{\sigma v} A\varphi(z) P,$$

et par suite :

$$\frac{dP}{dc} + \frac{\gamma+1}{2} \frac{P}{c - \varpi'} = \frac{10}{\sigma} A \frac{\varphi(z)}{z} \frac{P^2}{v}.$$

Au point ($c = c'$), origine de la courbe, où on a $z = z_0$, $P = P_0$ et $v = 0$, le second membre devient infini (excepté dans le cas de $z_0 = 0$).

La tangente à la courbe des pressions est donc *verticale* au point P_0, origine de cette courbe sur l'ordonnée du point $c = c'$.

4° *Tangente au point* $z = 1$. — La fin de la combustion de la poudre se fait sur la courbe des pressions de *stricte combustion* où on a :

$$P_1 = P'\theta_1^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Au point commun des deux courbes, les tangentes sont définies, pour la *courbe des pressions* (P, c) par la formule :

$$\frac{dP}{dc} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{P}{c' - \varpi'} = \frac{10}{\sigma} A \frac{\varphi(z)}{z} \frac{P^2}{v}$$

et, pour la courbe de *stricte combustion*, par la formule :

$$\frac{dP}{dc} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{P}{c' - \varpi'} = 0.$$

Il y a donc raccordement, au point $z = 1$, si :

$$\frac{10}{\sigma} A\varphi(1) \frac{P_1^2}{V_1} = 0.$$

Dans cette équation, P_1 et V_1 ne sont pas nuls.
On aura donc deux cas à considérer suivant que :

$$\varphi(1) = 0, \qquad \text{ou que} \qquad \varphi(1) \neq 0.$$

Prenant la fonction $\varphi(z)$ sous la forme :

$$\varphi(z) = (1 - z)^\beta$$

on voit que, pour les poudres *dégressives*, où $\beta > 0$ (Poudres BM), il y aura *raccordement* des deux courbes.

Si $\beta = 0$ (*poudres à combustion constante*) il n'y a pas raccordement ; les courbes se coupent suivant un certain angle.

Il en est de même *pour les poudres progressives* où :

$$\varphi(z) = z^{\beta'}.$$

5° *Courbe des pressions après la fin de la combustion de la poudre.* — Lorsque la pression dans l'âme a atteint, au point (P_1, c_1), la courbe de *combustion stricte*, toute la poudre est convertie en gaz ; ils occupent, à la pression P_1, le volume $(c_1 - \varpi')$. Ils se détendent suivant la loi adiabatique représentée par la formule :

$$P(c - \varpi')^{\gamma} = P_1 (c_1 - \varpi')^{\gamma}$$

ce qui, ainsi qu'on l'a vu (103), se transforme en la formule :

$$P\left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{\gamma} = \frac{P'}{s}$$

ou :

$$P = P' \frac{\theta^{\gamma}}{s}.$$

C'est une courbe de même forme que les précédentes ; elle coupe l'axe des P au point :

$$P'' = \frac{P'}{s}$$

qui est d'autant plus haut que A est plus petit.

Elle est toujours au-dessus de la courbe adiabatique γ définie par la formule :

$$P = P'\theta^{\gamma},$$

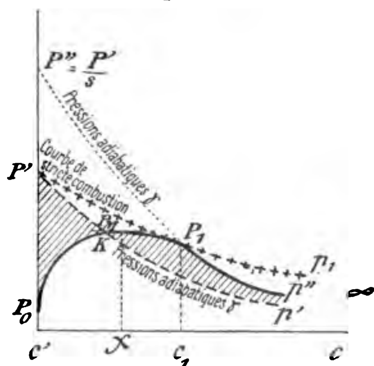


Fig. 30.

car s est toujours plus petit que l'unité.

On a entre P_1, P'' et P' la relation :

$$P_1 P'' = P'^2 s^{\frac{2}{\gamma - 1}}.$$

6° *Le tracé de la courbe* (P, c). — D'après les propriétés qui viennent d'être démontrées, on tracera facilement la courbe (P, c).

a) Elle part du point (P_0, c'), avec une tangente verticale.

b) Elle a pour équations, avec la variable auxiliaire z ;

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{r}W_{z_0}^{z}$$

$$P = P'z\left[1 - \mathbf{r}W_{z_0}^{z}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

c) Elle admet un maximum (P_M, χ) dont les coordonnées (P_M, χ) sont données par les formules de la pression maximum (111).

d) Elle vient toucher en un point (P_1, c_1), la courbe dite de *stricte combustion* dont l'équation est

$$P = P'\theta^{\frac{\gamma+1}{2}},$$

et on a les coordonnées du point commun P_1, par les formules :

$$\theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{s} \qquad \text{et} \qquad P_1 = P'\mathbf{s}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

La courbe (P, c) est tangente à la courbe de *stricte combustion* pour les poudres *dégressives* ; les deux courbes ne sont pas tangentes pour les poudres *progressives* ou les poudres *à combustion constante*.

e) La courbe (P, c) suit ensuite la courbe de détente adiabatique γ qui passe par le point P_1, et est définie par l'équation

$$P = P'\frac{\theta^{\gamma}}{\mathbf{s}}.$$

Elle coupe l'ordonnée de l'origine au point $P'' = \frac{P'}{s}$.

f) La courbe des pressions dans l'âme présente donc toujours un point anguleux au point P_1, où finit la combustion de la poudre.

g) Si l'on trace la courbe de *détente adiabatique* partant du point P′ et dont l'équation est $P = P'\theta^{\gamma}$, elle coupe la courbe (P, *c*) au point K et le principe de la constance du travail total fourni par un poids ϖ de poudre, démontre l'égalité des deux triangles curvilignes (hachurés) $P'KP_0$ et $KP_1\, p''p'\, \infty$ (à un terme du second ordre près, puisqu'on n'a conservé que le premier terme de la série) (91).

7° *Théorème. Au dessous d'une certaine vivacité* A_0, *le poids* ϖ *de poudre ne peut brûler complètement dans l'âme du canon, celle-ci fût-elle supposée indéfiniment prolongée.*

En effet, le paramètre **s** est toujours plus grand que zéro ; si **s** atteint la valeur o, le point P″ de la courbe adiabatique γ est à l'infini.

La condition **s** = o, donne :

$$\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}\mathbf{W}^{1}_{z_0} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\mu}{10 f \varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 \mathbf{W}^{1}_{z_0} = 0$$

d'où on déduit une certaine valeur A_0, par la formule :

$$(A_0)^2 = \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\sigma^2}{10 f \varpi \mu}\,\mathbf{W}^{1}_{z_0}.$$

A_0 est la limite supérieure de la vivacité des poudres qui ne brûlent pas complètement dans l'âme, même supposée indéfinie, quand on les tire avec une charge de poids ϖ.

123. **La courbe des pressions maximum**.— 1° Avec les *poudres dégressives* où le raccordement tangentiel des

deux courbes (P, c) et de *stricte combustion* se produit au point $z = 1$, il est évident que la courbe (P, c) présente un maximum réel.

Cherchons, quand A varie, la forme du lieu des points (P_M, χ) qui définissent la position du maximum de pression.

D'après la relation

$$\frac{\chi - \varpi'}{c' - \varpi'} = \left[\frac{1}{1 - \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{\zeta}}\right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

on voit qu'on aura $\chi = c'$ dans deux cas.

a) *Lorsque* **r** *sera nul.* Cela correspond à une poudre de *vivacité* A infinie, puisque

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2}\frac{\mu}{10 f \varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2.$$

La combustion est instantanée ; on a $\zeta = 1$, et $P_M = P'$. La courbe part donc du point P'.

b) *Lorsque* $\zeta = z_0$. On a en effet :

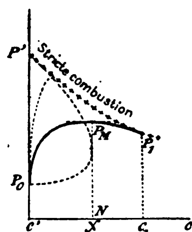


Fig. 31.

$$\mathbf{P}_{z_0}^{\zeta} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\varphi(\zeta)\frac{\mathbf{W}_{z_0}^{\zeta}}{\mathbf{V}_{z_0}^{\zeta}}\right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

et le crochet tend vers l'unité quand ζ se rapproche de z_0, ainsi qu'on le voit par le développement en série des fonctions $\mathbf{V}_{z_0}^{\zeta}$ et $\mathbf{W}_{z_0}^{\zeta}$ (97) qui donne :

$$\frac{\mathbf{W}_{z_0}^{\zeta}}{\mathbf{V}_{z_0}^{\zeta}} = \frac{\zeta - z_0}{2 z_0 \varphi(z_0)}.$$

On a alors :

$$P_M = P'z_0 = P_0.$$

Ainsi donc la courbe (P_M, χ), part du point P′, présente un maximum et vient se terminer au point P_0.

2° *Poudres progressives.* — Pour les poudres progressives, le maximum de pression peut ne pas être réel. Il faut qu'on ait en effet :

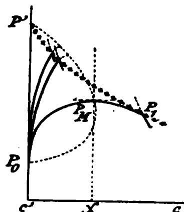


Fig. 32.

$$\chi < c_1$$

c'est-à-dire :

$$\zeta < 1$$

Comme, pour les poudres progressives, $\varphi(1) = 1$, on aura, pour définir la poudre limite à partir de laquelle la pression maximum sera imaginaire, la formule :

$$\frac{1}{\mathbf{r}} = \mathbf{W}^1_{z0} + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\mathbf{V}^1_{z0}.$$

Avec les poudres plus vives, on devra alors, pour avoir la pression la plus élevée P_1, employer la formule :

$$P_1 = P'\mathbf{s}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

124. **La courbe** (P, *t*). — 1° La courbe (P, *t*) est celle que fournissent directement les tracés du *crusher enregistreur* et du *manomètre à ressort,* le premier jusqu'au maximum de pression, le second jusqu'à la fin de la détente des gaz de la poudre.

On peut déduire la courbe (P, *c*) étudiée ci-dessus de la courbe (P, *t*) expérimentale ; celle-ci présente en elle-

même des propriétés intéressantes pour l'étude du fonctionnement de la poudre dans la bouche à feu.

L'équation de cette courbe n'est pas connue, en termes simples tout au moins, et, pour la discussion, on emploiera seulement les équations différentielles du mouvement.

Comme dans le cas de la courbe (P, c), on aura à considérer comme liées à la courbe (P, t), trois autres courbes: la courbe des *pressions adiabatiques*, la courbe de *stricte combustion*, et la courbe des *pressions* après la fin de la combustion.

On passera de la discussion de la courbe (P, c) à celle de la courbe (P, t), en remplaçant dans les équations différentielles : 10 dc par $\sigma v dt$.

2° La courbe des *pressions adiabatiques* γ part du point P' ; on a, en un point

$$\frac{10}{\sigma v}\frac{dP}{dt} + \gamma\frac{P}{c - \varpi'} = 0.$$

Pour $c = c'$, on a $v = 0$. La courbe part donc *horizontalement* au point P'.

On a également $\frac{dP}{dt} = 0$, pour $c = \infty$.

Il existe un point *d'inflexion* sur la courbe des pressions adiabatiques. On démontre aisément que cette inflexion se produit en un point tel que

$$\theta^{\gamma - 1} = \frac{2\gamma + 2}{3\gamma + 1}$$

et par suite, pour une pression

$$P_i = P'\left(\frac{3\gamma + 2}{3\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Pour cela, il suffit d'élever $\frac{dP}{dt}$ au carré, de remplacer v^2 en fonction de θ par la formule ;

$$u^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \left[1 - \theta^{\gamma - 1} \right]$$

et P par $P'\theta^\gamma$, de former $\frac{d^2P}{dt^2}$ et d'égaler à zéro le second membre de l'équation.

3° *La courbe de stricte combustion.* — Elle a la même équation que la courbe précédente au remplacement près de l'exposant γ par l'exposant $\frac{\gamma + 1}{2}$. Partant horizontalement du même point P′ et asymptote à l'axe des *t*, elle admet une *inflexion* en un point tel que :

$$\theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \frac{2\gamma + 3}{3\gamma + 5}$$

auquel correspond une pression d'inflexion :

$$P_i = P' \left[2 \frac{\gamma + 3}{3\gamma + 5} \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}.$$

Ce point d'inflexion est toujours plus bas que celui de la précédente courbe.

4° *L'origine de la courbe* (P, *t*). — On a, en un point quelconque de cette courbe

$$\frac{dP}{dt} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{P}{c - \varpi'} \frac{dc}{dt} = \frac{P}{z} \frac{dz}{dt}$$

Remplaçant $\frac{dc}{dt}$ par $\frac{\sigma v}{10}$

et $\frac{dz}{dt}$ par $A\varphi(z)P$

il viendra l'équation :

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\gamma+1}{2}\frac{\sigma}{10}\frac{Pv}{c-\varpi'} + AP^2\frac{\varphi(z)}{z}.$$

qui définit la tangente $\frac{dP}{dt}$ à la courbe (P, t).

A l'origine, pour $t = 0$, on a

$$c = c', \; v = 0, \; z = z_0 \text{ et } P = P_0.$$

Par suite :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_0 = AP_0\frac{\varphi(z_0)}{z_0}.$$

Mais, dans le vase clos où brûle la poudre avant le déplacement du projectile, on a, au même instant :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_0 = AP'P_0\varphi(z_0)$$

c'est-à-dire la même valeur, car on a $P_0 = P'z_0$.

Ainsi donc, *la tangente à l'origine de la courbe* (P, t), *prolonge la courbe du développement des pressions en vase clos.*

Mais, aussitôt après, l'expression de $\frac{dP}{dt}$ du canon renfermera le terme négatif

$$-\frac{\gamma+1}{2}\frac{\sigma}{10}\frac{Pv}{c-\varpi'}$$

de sorte que la courbe (P,t) va passer au-dessous de la tangente primitive, tandis que la pression en vase clos se développerait au-dessus de la tangente.

Ainsi donc, *il existera sur la branche ascendante de la courbe* (P,t) *du développement des pressions dans l'âme, un speudo-point d'inflexion à la rencontre de deux courbes*

tangentes, mais de courbures opposées. L'ordonnée de ce speudo-point d'inflexion donnera la valeur de la pression de forcement P_0.

5° *Le point* $z = 1$. — La courbe (P, t), au point $z = 1$, n'est pas tangente à la courbe de stricte combustion, même si $\varphi(1) = 0$, (poudres dégressives), car on a, pour la première, au point $z = 1$:

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_1 = -\frac{\gamma + 1}{2} \frac{\sigma}{10} \frac{P_1 V_1}{c_1 - \varpi'}$$

et pour la seconde,

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_1 = -\frac{\gamma + 1}{2} \frac{\sigma}{10} \frac{P_1 W_1}{c_1 - \varpi'}.$$

Le rapport des tangentes est donc $\frac{V_1}{W_1}$, rapport de ce qu'est la vitesse actuelle V_1, à ce qu'elle aurait été si la loi de détente adiabatique eut suivi l'exposant $\frac{\gamma + 1}{2}$.

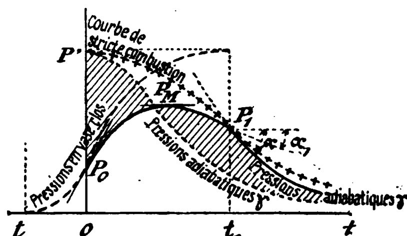


Fig. 33.

Après le point $z = 1$, la courbe (P, t) suit la courbe de combustion instantanée, ou de détente adiabatique d'exposant γ, qui passe en P_1 et en P'' :

Il existe ainsi, *sur la portion descendante de la courbe* (P, t) *des pressions en fonction du temps un point anguleux correspondant à la fin de la combustion de la poudre.*

Ainsi qu'on le voit, la courbe (P, t) présente, en ses

divers points remarquables (origine, point $z = 1$), des singularités plus accentuées que la courbe (P, c). Analytiquement, ce fait s'explique facilement en remarquant que la courbe (P, c) implique une intégration relativement à la courbe (P, t).

6° *Tracé de la courbe* (P, t). — On pourra tracer, par *approximation*, la courbe (P, t) dont on n'a pas l'équation en termes finis, en faisant usage du théorème démontré au n° 105 que le premier terme de la série qui donne le temps, jusqu'au point (P_1, c_1) est le même que celui qui donne la valeur de t en vase clos.

Ainsi, pour la pression P_1, le temps est donné par la formule

$$AP't_1 = \mathbf{L}(1) - \mathbf{L}(z_0).$$

Pour la pression maximum P_M on a :

$$AP't_m = \mathbf{L}(\zeta) - \mathbf{L}(z_0).$$

125. **La courbe** (v^2, c). — Nous représenterons la courbe des vitesses en fonction des espaces parcourus c, en prenant comme ordonnée le carré v^2 de la vitesse au point c.

1° *Vitesses adiabatiques* $\frac{\gamma+1}{2}$. — Soit, tout d'abord, tracée, avec ces axes, la courbe de la vitesse adiabatique w qui correspondrait à la combustion instantanée d'une poudre dont la détente se ferait suivant l'exposant $\frac{\gamma+1}{2}$.

On aurait

$$\frac{1}{2}\mu w^2 = \frac{2}{\gamma - 1} 10 f\varpi \left[1 - \theta^{\frac{\gamma+1}{2}}\right]$$

Cette courbe (w^2, c) part du point $c = c'$, où on a $w = 0$.

Cherchons la tangente en ce point. On trouve, en un point quelconque

$$\frac{dw^2}{dc} = \frac{20}{\mu} \mathrm{P}'\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}$$

ce qui, à l'origine, se réduit à

$$\left(\frac{dw^2}{dc}\right)_0 = \frac{20\,\mathrm{P}'}{\mu}.$$

La tangente à l'origine est donc oblique.

La courbe est *concave* vers l'axe des c et admet une asymptote horizontale au point

$$\mathrm{W}^2_\infty = \frac{4}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu}.$$

2° *Vitesses de stricte combustion.* — Nous tracerons, en outre, dans le plan, la courbe des vitesses V_1^2 en fonction de c_1 — courbe (V_1^2, c_1) — dont l'équation (94[bis]) est

$$\mu \mathrm{V}_1^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{[\mathbf{V}^1_{z_0}]^2}{\mathbf{W}^1_0} 10 f \varpi \left[1 - \theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}}\right].$$

C'est le lieu des points où s'achève la combustion de la poudre.

Elle se déduit de la courbe adiabatique $\frac{\gamma+1}{2}$, pour une même valeur de c, en réduisant les ordonnées dans le rapport de 1 à

$$\frac{1}{2} \frac{[\mathbf{V}^1_{z_0}]^2}{\mathbf{W}^1_{z_0}}.$$

Elle admet une asymptote à une hauteur

$$(\mathrm{V}_1^2)_\infty = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \frac{[\mathbf{V}^1_{z_0}]^2}{\mathbf{W}^1_{z_0}}.$$

3° *Vitesses adiabatiques* γ. — Considérons, enfin, la courbe des vitesses u^2 qu'aurait acquises le projectile si la détente des gaz avait eu lieu, depuis l'origine où on suppose la combustion complète, suivant la loi de détente représentée par l'exposant γ.

On a

$$\frac{1}{2}\,\mu u^2 = \frac{1}{\gamma - 1}\, 10 f \varpi \left[1 - \theta^{\gamma - 1}\right].$$

Cette courbe est, à l'origine, tangente à la courbe d'exposant $\frac{\gamma + 1}{2}$. Elle admet une asymptote horizontale au point

$$U^2_\infty = \frac{2}{\gamma - 1}\,\frac{10 f \varpi}{\mu}$$

c'est-à-dire à la moitié de l'ordonnée de l'asymptote de la courbe w^2.

4° *Courbe* (v^2, c). — Nous sommes maintenant en mesure de préciser le tracé de la courbe des vitesses réelles le long de l'âme.

Avant la fin de la combustion de la poudre, éliminons la *vivacité* A entre les deux équations

$$v = \frac{\sigma}{A\mu}\,\mathbf{V}^{z}_{z_0}$$

$$1 - \mathbf{r}\mathbf{W}^{z}_{z_0} = \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}$$

où

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\mu}{10 f \varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2.$$

La relation entre v^2 et c se mettra sous la forme

$$\mu v^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\,\frac{[\mathbf{V}^{z}_{z_0}]^2}{\mathbf{W}^{z}_{z_0}}\, 10 f \varpi \left[1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right]$$

équation où entre la variable z, dans les deux fonctions **V** et **W**.

On a d'ailleurs établi la relation

$$\mu \frac{vdv}{dc} = 10\,P'z\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

ce qui permet, en comparant les courbes w^2 et v^2, d'écrire

$$\frac{dv^2}{dc} = z\,\frac{dw^2}{dc},$$

relation entre les tangentes aux courbes v^2 et w^2.

A l'origine, toutes les courbes (v^2,c) ont même tangente quelles que soient la vivacité A *et la force de la poudre f.*

On a, en effet

$$\left(\frac{dv^2}{dc}\right)_0 = z_0\left(\frac{dw^2}{dc}\right)_0 = \frac{20}{\mu}\,P'z_0$$

ou bien encore

$$\left(\frac{dv^2}{dc}\right)_0 = \frac{20}{\mu}\,P_0$$

P_0 étant la *pression de forcement.* Donc, dans l'expression de la tangente à l'origine, n'entrent que cette pression P_0 et la masse μ du projectile, mais ni A, ni f, ni explicitement ϖ.

5° *La courbe (v^2,c) présente un point d'inflexion.*

En effet, l'équation

$$\frac{dv^2}{dc} = z\,\frac{dw^2}{dc}$$

différentiée, donne

$$\frac{d^2v^2}{dc^2} = \frac{dz}{dc}\frac{dw^2}{dc} + z\,\frac{d^2w^2}{dc^2}.$$

Mais

$$\frac{dw^2}{dc} = \frac{2\,0}{\mu} \mathrm{P}'\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

d'où

$$\frac{d^2w^2}{dc^2} = -\frac{\gamma+1}{2}\frac{2\,0}{\mu}\mathrm{P}'\theta^{\frac{\gamma+3}{2}}\frac{1}{c'-\varpi'}$$

On aura donc, pour la condition $\frac{d^2v^2}{dc^2} = 0$ qui définit le point d'inflexion :

$$\frac{dz}{dc} = \frac{\gamma+1}{2}\frac{z\theta}{c-\varpi'}.$$

d'où

$$\frac{dz}{dc} = \frac{\gamma+1}{2}\frac{z\left[1-\mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z}\right]^{\frac{\gamma-1}{2}}}{c'-\varpi'}.$$

Au point de pression maximum, on a

$$\frac{d\zeta}{dc} = \frac{\gamma+1}{2}\frac{\zeta}{c'-\varpi'}.$$

Comme $\theta < 1$, on voit que le point d'inflexion de la courbe (v^2,c) sera situé avant le *point de pression maximum* χ.

6° *Au point* $z = 1$, on a $\left(\frac{dv^2}{dc}\right)_1 = \left(\frac{dw^2}{dc}\right)_1$; la courbe (v^2,c) a sa tangente parallèle à celle de la courbe (w^2,c) au même point c_1.

7° Après la *fin de la combustion de la poudre*, la courbe (v^2,c) est représentée par l'équation

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu \mathrm{V}_1^2 + \frac{10 f\varpi}{\gamma-1}\left[\mathbf{s} - \frac{\theta}{\mathbf{s}}^{\gamma-1}\right]$$

où $\mathbf{s}$ est une constante telle que

$$\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}\mathbf{W}^{1}_{2C}.$$

On a, en un point de cette courbe

$$\frac{dv^2}{dc} = \frac{20}{\mathbf{s}\mu} \mathrm{P}'\theta^{\gamma}$$

et au point $(\mathrm{V}_1,\ c_1)$

$$\left(\frac{dv^2}{dc}\right)_1 = \frac{20}{\mathbf{s}\mu} \mathrm{P}'\theta_1^{\gamma}.$$

Comme cette valeur ne coïncide pas avec la valeur $\left(\frac{dw^2}{dc}\right)_1$ qui est (1°) $\frac{20}{\mu} \mathrm{P}'\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}$ on voit que, *au point* (V_1^2, c_1) *de la fin de combustion de la poudre, la courbe des carrés des vitesses présente un point anguleux.*

8° La courbe (v^2,c) s'étend ensuite jusqu'à l'infini entre les deux courbes u^2 et V_1^2. Son asymptote est telle que

$$\frac{1}{2}\mu\,(v^2)_\infty = \frac{1}{2}\mu \mathrm{V}_1^2 + \frac{10 f \varpi}{\gamma - 1}\,\mathbf{s}$$

ce qu'on peut écrire en remplaçant $\mathbf{s}$ par sa valeur

$$\frac{\mu}{2}(v^2)_\infty = \frac{10 f \varpi}{\gamma - 1} + \frac{\mu \mathrm{V}_1^2}{2}\left[1 - \frac{\mathbf{W}^{1}_{20}}{[\mathbf{V}^{1}_{20}]^2}\right].$$

Le 1er terme du second membre représente le travail total que peut effectuer le poids ϖ de poudre ; le second membre représente l'erreur que l'on a consentie en ne prenant pour résoudre le problème que le premier terme de la série. La comparaison de l'ordre de grandeur de ces

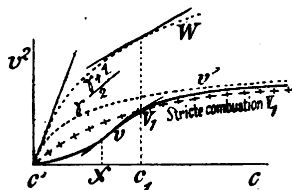


Fig 34.

deux termes permet, dans chaque cas particulier, de se rendre compte de l'approximation obtenue et de la légitimité de l'emploi d'un seul terme de la série pour le calcul des vitesses. Avec les longueurs des canons usuels, les vitesses seront affectées d'erreurs beaucoup moins grandes que l'erreur maximum ainsi calculée.

§ 3. — Le tir a charge variable (ϖ variable)

126. **Définition.** — Supposons maintenant que, dans un canon donné, on tire une même poudre (f. A), la seule variable étant le poids ϖ de la charge, et cherchons quelles vont être les propriétés générales des diverses trajectoires ainsi obtenues. On supposera spécialement ici, pour plus de simplicité dans les notations, que le covolume η est égal à l'unité. Donc $\varpi = \varpi'$ et $\Delta = \Delta'$.

127. **Courbe de sécurité absolue du canon.** — La courbe adiabatique des pressions :

$$P(c - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}} = f\varpi(c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

est toujours située au-dessus de la courbe vraie du développement des pressions dans l'âme, avec laquelle elle a le point $z = 1$ commun.

Or, la courbe adiabatique, quand on suppose que ϖ varie, admet une *enveloppe* à l'intérieur de laquelle ne pénètre aucune des courbes adiabatiques $\frac{\gamma+1}{2}$ et par conséquent aucune des courbes (P, c) du canon quelle que soit la valeur de la charge. Pour déterminer cette enveloppe, il suffira d'éliminer ϖ entre la relation qui définit

la courbe $\frac{\gamma+1}{2}$ et une seconde relation obtenue en prenant la dérivée de la première relativement à ϖ.

La dérivée est, en supposant le covolume η égal à l'unité :

$$-\frac{\gamma+1}{2}P(c-\varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}} = f(c'-\varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}-1}\left(c'-\frac{\gamma+1}{2}\varpi'\right).$$

Divisant les deux équations membre à membre, il viendra :

$$\frac{\varpi'(c'-\varpi')}{c'-\frac{\gamma+1}{2}\varpi'}+\frac{c-\varpi'}{\frac{\gamma+1}{2}}=0,$$

d'où on déduit :

$$\varpi' = \frac{cc'}{c'+\frac{\gamma+1}{2}(c-c')}$$

relation entre les deux variables ϖ' et c; en portant la valeur de ϖ' dans l'expression de P, on aura la courbe :

$$P\left(\frac{c}{c'}-1\right)\left(\frac{c}{c'}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = f\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2}}.$$

C'est l'enveloppe cherchée.

Elle est de forme hyperbolique, ayant pour asymptotes l'ordonnée à l'origine et l'axe des c.

C'est la courbe de *sécurité absolue pour le canon.*

Quels que soient la *poudre* (A), la *fonction de forme* $\varphi(z)$, la *charge* (ϖ), le *poids du projectile* (p), la pression ne dépassera jamais, pour une valeur de c donnée, la valeur fournie par l'équation de la courbe de sécurité. Cette courbe renferme seulement deux caractéristiques : la *force* f de la poudre, et le *volume* c' de la chambre à poudre.

Elle est la même pour tous les *canons*, en prenant pour abscisse la *division* $\rho = \frac{c}{c'}$ de l'âme.

Il y a lieu de remarquer que la démonstration ne prouve pas que la courbe (P, c) du canon vienne toucher la *courbe de sécurité* ; le point P_1 n'est pas en effet, en général, le point de contact de 2 courbes :

$$P = P'z\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

infiniment voisines.

128. **Limite inférieure de la charge et de la vitesse.** — Pour qu'il y ait mouvement, il faut que la charge ϖ soit capable de vaincre le forcement initial P_0 du projectile. La charge-limite inférieure est ϖ_0 qui est telle ($\eta = 1$) que :

$$P_0 = \frac{f\varpi_0}{c' - \varpi_0}$$

ou :

$$\varpi_0 = \frac{P_0 c'}{f + P_0}.$$

Si on tire exactement avec la charge ϖ_0, la courbe des pressions dans l'âme suit la loi adiabatique, d'exposant γ, définie par la relation :

$$P(c - \varpi_0)^{\gamma} = f\varpi_0 (c' - \varpi_0)^{\gamma-1}.$$

On ne peut donc pas obtenir, dans un canon, de vitesse initiale inférieure à celle qui est donnée par la formule :

$$v_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f\varpi_0}{\mu} (1 - \theta_0^{\gamma-1}).$$

Ou le projectile ne part pas, ou il part avec une vitesse $> v_0$.

129. **Combustion incomplète.** — *Il existe une charge ϖ_1 telle que, pour toutes les charges inférieures, la poudre ne peut brûler complètement dans le canon, même en admettant que l'âme soit indéfiniment prolongée.*

En effet, la vitesse limite $(v^2)_\infty$ que peut fournir un poids ϖ_1 de poudre est donnée par la formule :

$$(v^2)_\infty = V_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \mathbf{s},$$

et pour que $(v^2)_\infty$ soit plus grand que V_1 il faut que $\mathbf{s} > 0$.

C'est la même condition que celle rencontrée au n° 122,7°. Mais ici la variable est ϖ_1 et on a la condition :

$$\mu\varpi_1 > \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{10 f} \frac{\mathbf{W}_{z_0}^1}{A^2}$$

ϖ_1 diminue donc quand la *vivacité* (A) de la poudre ou le *poids* (p) du projectile augmentent.

Pour les charges inférieures à ϖ_1 on aura la vitesse-limite pour $c = \infty$ en prenant les équations de la combustion incomplète qui deviennent alors :

$$1 = \mathbf{r}\mathbf{W}_{z_0}^{z_\infty} \qquad v_\infty = \frac{\sigma}{A\mu} \mathbf{V}_{z_0}^{z_\infty}$$

Elles déterminent, en même temps, la fraction z_∞ de poudre brûlée, pour une longueur d'âme infinie.

130. **Limite supérieure de la charge et de la vitesse.** — D'après ce qui a été expliqué (10) les équations du mouvement n'ont plus de sens physique quand on y suppose $\varpi' > c'$. La valeur $c' = \varpi'$ rend infinie la pression en vase clos P'.

Cette valeur $\varpi' = c'$ constitue donc la limite supérieure de la charge que l'on peut employer dans le tir.

Pour ce poids $\varpi' = c'$, le travail maximum fourni par les gaz de la poudre est donné par la formule :

$$\frac{1}{2}\mu(v'^2)_\infty = \frac{10fc'}{\gamma - 1}.$$

Cette formule donne une *limite supérieure* de la vitesse qu'il est possible d'atteindre avec les poudres actuelles (f donné) dans un canon de longueur indéfinie et de chambre c' pour un projectile de poids p donné. En rapprochant cette proposition de ce qui a été démontré au nº 128 on peut énoncer le théorème suivant :

La vitesse que l'on peut imprimer à un projectile de masse μ est comprise entre les deux limites :

$$v_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\frac{10f\varpi_0}{\mu}$$

et :

$$v_\infty^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\frac{10f}{\mu}c'.$$

Leur rapport est égal à :

$$\frac{v_0^2}{v_\infty^2} = \frac{\varpi_0}{c'}$$

c'est-à-dire égal à la densité de chargement Δ_0 de forcement qui est telle que :

$$P_0 = f\frac{\Delta_0}{1 - \Delta_0'}.$$

130bis. **Courbe** (P, c). — Le graphique ci-dessous résume les propriétés démontrées dans ce paragraphe.

La courbe ϖ_1 est la limite inférieure de la charge qui peut brûler complètement dans le canon.

ϖ_0 est la courbe adiabatique correspondant à la pres-

sion de forcement P_0. Comme celle-ci brûle complètement, il en sera de même d'une charge $\varpi_0 + \varepsilon$. C'est qu'en effet dans la relation :

$$\mu\varpi_1 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\sigma^2}{10f} \frac{\mathbf{W}^1_{z0}}{A^2},$$

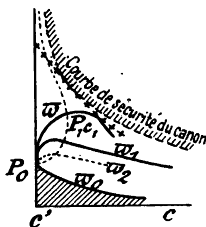


Fig. 35.

le facteur $\mathbf{W}^1_{z0}$ tend vers zéro, lorsque z_0 tend vers 1. Donc, il existera une autre limite ϖ_2 au-dessous de laquelle la combustion de la poudre sera complète, de sorte que ce n'est que dans l'intervalle de ϖ_1 à ϖ_2, intervalle qui peut être nul d'ailleurs, que la combustion sera incomplète.

§ 4. — Le tir a projectile variable (p variable)

131. **Hypothèse.** — On suppose que, dans un canon donné, on tire un poids constant ϖ d'une même poudre (A donné), mais avec des projectiles de poids différents.

Dans les formules, le poids du projectile n'entre que dans le facteur μ sous la forme $\dfrac{p + \theta\varpi}{g}$.

μ ne peut donc varier qu'au dessus de $\dfrac{\theta\varpi}{g}$; cette valeur correspond à l'hypothèse d'un projectile de poids nul, c'est-à-dire du tir d'un opercule, sans poids, limitant la charge à l'avant et produisant, dans l'âme, un *forcement initial* P_0.

Nous étudierons sommairement les propriétés du mouvement de ces divers projectiles.

132. **Courbe de sécurité du canon.** — La courbe de sécurité est constituée par la courbe adiabatique d'exposant $\frac{\gamma+1}{2}$ qui est aussi la courbe de *combustion stricte unique* pour tous les projectiles, quels que soient leurs poids, et dont l'équation est :

$$P = P'\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Si on considère un point $(P_1\ c_1)$ de la courbe précédente, la courbe des pressions dans l'âme est prolongée, après ce point, par la courbe adiabatique γ dont l'équation est :

$$P = \frac{P'}{\mathbf{s}}\,\theta^{\gamma}.$$

C'est une courbe dont les ordonnées sont dans le rapport $\frac{1}{\mathbf{s}}$ avec celles de la courbe des pressions adiabatiques γ.

Comme on a :

$$\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}\mathbf{W}^{1}_{z_0} = 1 - \frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\mu}{10 f \varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 \mathbf{W}^{1}_{z_0}$$

on voit que $\mathbf{s}$ augmente lorsque μ augmente.

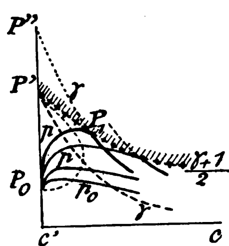


Fig. 36.

Donc, le point $P'' = \frac{P'}{\mathbf{s}}$ où la courbe coupe l'axe des P est d'autant plus voisin du point P' que μ est plus grand.

Ainsi le point P_1 où finit la combustion, intersection des 2 courbes $\left(P', \frac{\gamma+1}{2}\right)$ et (P'', γ) remonte sur la courbe de stricte combustion et tend vers P' à mesure que le poids μ

du projectile augmente ; pour $\mu = \infty$, on a $\mathbf{s} = 1$ et le point P_1 vient en P'.

On verrait, en répétant la démonstration du n° 123, que le lieu des pressions maxima, pour p variable, part de P', présente un éloignement maximum et tend vers le point P_0, mais pour des valeurs non réalisables de $p\left(p = -\frac{\theta\varpi}{g}\right)$.

L'analogie des propriétés des courbes (P, c), dans le cas de A variable et de μ variable, tient à ce que ces deux quantités sont engagées, dans $\mathbf{r}$ ou $\mathbf{s}$, seulement sous la forme du produit $A^2\mu$.

133. **Combustion incomplète.** — *Il peut exister un poids p_1 du projectile tel que, pour les poids inférieurs, la poudre ne brûle pas complètement, même pour un canon dont la longueur d'âme serait infinie.*

Même raisonnement et même équation qu'au n° 128. On écrira alors, pour le poids limite μ_1 ;

$$\mu_1 > \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{10 f \varpi} \left(\frac{\sigma}{A}\right)^2 \mathbf{W}^1_{z0}.$$

Comme on a :

$$\frac{p_1 + \theta\varpi}{g} = \mu_1$$

p_1 n'aura une valeur différente de zéro que si :

$$\frac{\theta\varpi^2}{g} < \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{10 f} \left(\frac{\sigma}{A}\right)^2 \mathbf{W}^1_{z0}.$$

Le graphique ci-dessus (fig. 36) rend compte de l'ensemble des propriétés de la courbe (P, c) (p variable). La courbe p_0 est celle qui correspond à $p = 0$, c'est-à-dire à $p = \frac{\theta\varpi}{g}$;

la courbe p_1 est la courbe de combustion incomplète ; enfin la courbe p est une courbe pour une valeur quelconque.

134. **La courbe** (v^2, c). — *Courbe de stricte combustion.* En éliminant μ entre les deux équations :

$$\mu V_1 = \frac{\sigma}{A} \mathbf{V}^1_{z0},$$

et :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = r\mathbf{W}^1_{z0} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 \mathbf{W}^1_{z0},$$

il viendra, pour équation de la courbe (V_1, c_1) la formule :

$$1 - \theta_1^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{10 f \varpi} \frac{\sigma}{A} V_1 \frac{\mathbf{W}^1_{z0}}{\mathbf{V}^1_{z0}}.$$

En l'élevant au carré, on aura la courbe de *stricte combustion* dans les axes (V_1^2, c).

On aura tout d'abord :

$$\frac{dV_1^2}{dc_1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad c_1 = c',$$

la courbe part ainsi tangentiellement à l'axe des c.

Pour $c_1 = \infty$, on a pour V_1^2 une valeur finie, car :

$$(V_1)_\infty = \frac{2}{\gamma - 1} 10 f \varpi \frac{A}{\sigma} \frac{\mathbf{V}^1_{z0}}{\mathbf{W}^1_{z0}}.$$

La courbe admet donc une *asymptote horizontale.*

Courbe (v^2, c). — Une courbe quelconque, avec une valeur donnée de p, se construira comme au n° 125.

La tangente à l'origine a pour expression :

$$\left(\frac{dv^2}{dc}\right)_0 = \frac{20}{\mu} P_0.$$

qui est d'autant plus inclinée sur l'axe des c, que μ est plus petit.

Cette courbe présente un point d'inflexion correspondant à un point situé avant le point χ de pression maximum.

La fin de la combustion de la poudre se fait à l'intersection des deux courbes de *combustion stricte*, la précédente (μ variable), et celle du numéro 125 (A variable).

Lorsque p diminue, les courbes (v^2, c) s'élèvent ; p peut devenir assez petit pour que la poudre ne soit pas totalement brûlée, pour $c = \infty$; la courbe ne rencontre plus alors la courbe de combustion stricte et est située au-dessus.

Si on fait $p = 0$, on aura pour vitesse limite, qui dans le cas général est donnée par la formule

$$\frac{1}{2}\mu (v^2)_\infty = \frac{10 f \varpi}{\gamma - 1}$$

l'équation :

$$\frac{\vartheta}{2g}(v^2)_\infty = \frac{10 f}{\gamma - 1}.$$

On voit que ϖ disparait de l'équation.

La vitesse limite est donc la même, pour un poids de poudre quelconque, quand μ tend vers zéro. Ce résultat, qui a une forme paradoxale, s'explique par le fait que, dans tous les cas, la même fraction ϑ de la charge constitue un projectile fictif[1].

[1] Si on fait, pour fixer les idées, un calcul approximatif avec :

$$\vartheta = \frac{1}{2}, \quad g = 10, \quad f = 10000 ; \quad \gamma = 1 + \frac{1}{4}$$

on trouve : $(v^2)_\infty = 40 . 40 . 10000$

d'où : $v_\infty = 4000^m$.

On ne saurait, avec les poudres actuelles, dépasser cette vitesse initiale, même avec un projectile de poids nul.

§ 5. — Le tir a forcement variable (P_0 variable)

135. **Hypothèses.** — Nous supposons qu'on tire un canon dans des conditions identiques d'un coup à l'autre, en faisant varier simplement la pression P_0 de forcement, soit qu'on agisse sur le montage (ceinture) du projectile, soit que le canon s'use progressivement.

La fraction brûlée de forcement z_0 dont la valeur est

$$z_0 = \frac{P_0}{P'}$$

sera supposée variant depuis o jusqu'à 1.

Nous étudierons successivement la courbe (P, c) des pressions et la courbe (v^2, c) des vitesses.

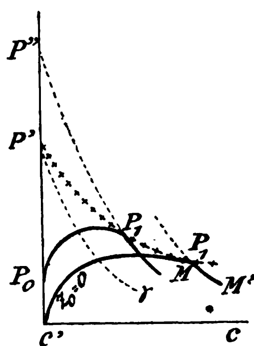


Fig. 37.

136. **Courbe** (P, c). — La courbe de *stricte combustion* sera l'adiabatique $\frac{\gamma+1}{2}$.

1° La courbe (P, c) a pour tangente en un point

$$\frac{dP}{dc} + \frac{\gamma+1}{2}\frac{P}{c'-\varpi'} = \frac{10}{\sigma} A \frac{\varphi(z)}{z}\frac{P^2}{v}.$$

Comme, en général, on a, à l'origine :

$$z = z_0, \quad P = P_0 \quad \text{et} \quad v = 0$$

on a :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_0 = \infty.$$

La tangente à l'origine est donc verticale, excepté, peut-être, pour $z = 0$, auquel cas $P = 0$.

Examinons ce cas.

Comme on a :

$$P = P'z\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}$$

et

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} V_{z_0}^{z}$$

on écrira :

$$\frac{dP}{dc} + \frac{\gamma+1}{2} \frac{P}{c' - \varpi'} = 10 \frac{A^2\mu}{\sigma^2} \frac{\varphi(z)}{V_{z_0}^{z}} z\theta^{\gamma+1}$$

et, d'après le développement de $V_{z_0}^{z}$ en série (97) :

$$V_{z_0}^{z} = \frac{z - z_0}{\varphi_0} [1 + \ldots]$$

il viendra :

$$\left(\frac{dP}{dc}\right)_0 = 10 \frac{A^2\mu}{\sigma^2} P'^2 \frac{[\varphi(0)]^2}{z - z_0} z$$

qui, pour $z_0 = 0$, se réduit à :

$$\left(\frac{dP}{dc}\right)_0 = 10 \frac{A^2\mu}{\sigma^2} P'^2 [\varphi(0)]^2.$$

Or, $\varphi(0) = 1$, pour le cas des poudres *dégressives*.
$\varphi(0) = 0$, » » *progressives*.

Dans le premier cas, la tangente est *inclinée* ; elle est *horizontale* dans l'autre cas.

2° Toutes les courbes (P, c) sont comprises, avant la fin

de la combustion, entre la courbe $z_0 = 0$, et la courbe de *stricte combustion.*

Si $z_0 = 1$, la charge ϖ est juste capable de vaincre le forcement initial et la courbe des (P, c) est la courbe de détente adiabatique γ qui part du point P′.

3° Les points P_1, qui sont tels que :

$$P_1 = P' \mathbf{s}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad \theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{s}$$

avec :

$$\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}\mathbf{W}^1_{z_0}$$

remontent vers le point P′ à mesure que z_0 se rapproche de 1, car $\mathbf{s}$ augmente.

4° Après la fin de la combustion, les courbes (P, c) sont représentées par l'équation :

$$P = P' \frac{\theta^\gamma}{\mathbf{s}}$$

et le point P″ se rapproche du point P′ à mesure que z_0 se rapproche de l'unité.

5° La courbe de sécurité du canon est donc constituée (fig. 37) de P′ en M par la courbe de stricte combustion et de M à l'infini par la courbe MM′, dont l'équation est :

$$P = P' \frac{\theta^\gamma}{\mathbf{s}}$$

où, dans $\mathbf{s}$, on fera $z_0 = 0$.

137. **Courbe (P, t).** — On rappellera seulement le théorême démontré au numéro 124,4°. *Au point P_0, la courbe (P, t) du canon prolonge la courbe (P, t) en vase clos ; mais les courbures de ces deux courbes, au point commun, sont opposées, de sorte que la courbe continue présente un*

speudo-point d'inflexion dont l'ordonnée permet de déterminer la pression de forcement P_0.

Pour $z_0 = 0$, la tangente à la courbe (P, t) serait horizontale.

138. **Courbe** (v^2, c). — 1° La courbe de stricte combustion serait obtenue par l'élimination de z_0 entre les deux équations :

$$V_1 = \frac{\sigma^2}{A\mu} \mathbf{V}^1_{z_0}$$

et :

$$1 - \theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = r\mathbf{W}^1_{z_0}$$

Toutes les courbes (v^2, c) sont comprises entre la courbe correspondant à $z_0 = 1$, et la courbe correspondant à $z_0 = 0$.

2° La première est la courbe donnée par une *détente adiabatique* γ dont l'équation est :

$$u^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \left(1 - \theta^{\gamma - 1}\right);$$

elle admet une asymptote pour la valeur

$$U^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu}$$

et a pour tangente à l'origine

$$\frac{du^2}{dc} = \frac{20\,P'}{\mu}.$$

La seconde ($z_0 = 0$) a pour équation, avant la fin de la combustion :

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} \mathbf{M}\,(z)$$

et :

$$1 - \mathbf{r}\mathbf{N}(z) = \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}.$$

La fonction $\mathbf{V}_{z_0}^{z}$ se réduit, en effet, à $\mathbf{M}(z)$, et la fonction $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$ devient $\mathbf{N}(z)$.

On aura ainsi :

$$\frac{dv^2}{dz} = 2 \frac{\sigma}{A\mu} \frac{\overline{\mathbf{M}}(z)}{\varphi(z)}$$

$$\mathbf{r} \frac{\mathbf{M}}{z\varphi(z)} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}}{c' - \varpi'} \frac{dc}{dz}$$

d'où :

$$\frac{dv^2}{dc} = (\gamma - 1) \frac{\sigma}{A\mu} \frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}}{c' - \varpi'} z$$

ce qui s'annule pour $z = 0$.

La tangente à l'origine est donc *horizontale*.

3° Après la fin de la combustion, la courbe (v^2, c) est représentée par l'équation ordinaire où $\mathbf{s}$ prend la valeur $1 - \mathbf{r}\mathbf{N}(1)$, et la vitesse a pour expression (à un terme du deuxième ordre près) :

$$v_\infty^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu}$$

correspondant au travail total que peut fournir un poids ϖ de poudre.

4° On a vu, au numéro 125, que les tangentes à l'origine à la courbe (v^2, c), ont pour expression :

$$\left(\frac{dv^2}{dc}\right)_0 = \frac{20}{\mu} P' z_0$$

quantité qui varie bien, ainsi, depuis 0 jusqu'à $\frac{20}{\mu} P'$.

5° Dans le voisinage de l'origine, on peut donner l'expression explicite de v^2.

On a, en effet, comme premier terme du développement de $\mathbf{W}_{z_0}^z$ (97), la formule

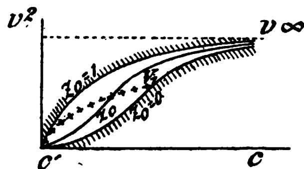


Fig. 38.

$$\mathbf{W}_{z_0}^z = \frac{(z - z_0)^2}{2z_0}$$

si : $\varphi(0) = 1.$

D'autre part, dans les mêmes conditions :

$$\mathbf{V}_{z_0}^z = z - z_0.$$

On aura donc, pour les équations de la vitesse

$$v = \frac{\sigma}{\Lambda\mu}(z - z_0)$$

et :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{r}\,\frac{(z - z_0)^2}{2z_0}.$$

L'élimination de $(z - z_0)$ donnera la formule

$$v^2 = \left(\frac{\sigma}{\Lambda\mu}\right)^2 \frac{2z_0}{\mathbf{r}}\left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)$$

ou :

$$v^2 = \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{10 f \varpi}{\mu}\,z_0\left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right).$$

Ainsi, dans les premiers instants du trajet, l'énergie du projectile μv^2, pour le même parcours θ, est proportionnelle à la fraction z_0 de forcement.

§ 6. — Le tir a chambre variable (c' variable)

139. **Hypothèse.** — Toutes les conditions du chargement ϖ, A, μ, z_0 restant les mêmes, on suppose que le volume c' de la chambre à poudre varie, croissant ainsi progressivement depuis la valeur limite ϖ', et on se propose de rechercher les principales particularités du mouvement du projectile.

140. **Diagramme des pressions.** — Soit o l'origine des c; les points c', c' sont les origines du mouvement pour des chambres progressivement agrandies.

1° On cherchera d'abord le lieu du point P', qui, pour chaque valeur de c' est déterminée par la formule

$$P' = \frac{f\varpi}{c' - \varpi'}.$$

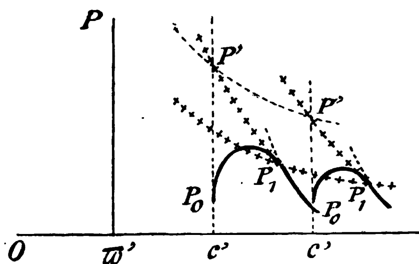


Fig. 39.

Le lieu est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes l'axe des c, et l'ordonnée du point ϖ'.

Les courbes de détente adiabatique $\frac{\gamma + 1}{2}$ qui passent par les points P' et qui répondent à l'équation :

$$P = P'\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}$$

admettent, également, la droite ϖ' pour asymptote verticale et l'axe des c pour asymptote horizontale.

2° Le lieu des points P_1, où finit la combustion, s'obtiendra de la manière suivante :

On a, au point (P_1, c_1), la relation

$$1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c_1 - \varpi'}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{rW}_{z_0}^{1}$$

et d'autre part :

$$P_1 (c_1 - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}} = f\varpi (c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

éliminant $(c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}$ entre ces deux équations, il viendra :

$$P_1 (c_1 - \varpi') = f\varpi\mathbf{s}$$

La courbe est encore une hyperbole équilatère, mais dont le paramètre est plus petit que celui de la courbe des points P'.

141. **La courbe** (v^2, c). — Etudions maintenant la courbe des carrés des vitesses en fonction des espaces parcourus, quand c' varie.

1° La *courbe de combustion stricte* est une parallèle à l'axe des c. En effet, l'équation qui donne la vitesse stricte de combustion

$$V_1 = \frac{\sigma}{A\mu} \mathbf{V}_{z_0}^{1}$$

ne renferme pas la variable c'.

D'autre part, la seconde équation qui définit le point c_1 où finit la combustion est :

$$\theta_1 = \mathbf{s}^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

ou :

$$\frac{c' - \varpi'}{c_1 - \varpi'} = s^{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

Donc le rapport $\frac{c_1 - \varpi'}{c' - \varpi'}$ est une constante.

On en déduit que si on joint le point M, ordonnée de c_1 sur la droite V_1^2 de stricte combustion, au point ϖ', on a :

$$\frac{NC'}{MC_1} = \frac{c' - \varpi'}{c_1 - \varpi'}$$

et comme MC_1 est une constante égale à V_1^2, la hauteur NC' est une constante.

Fig. 40.

Ayant donc tracé la droite NX, on obtiendra, pour un point C″ l'abcisse c du point de stricte combustion, en menant C″N″, puis ϖ'N″M″ qui donnera le point c_1''.

2° Mais cette propriété et cette construction s'étendent à toutes les portions de courbe (v^2, c) avant la fin de la combustion, puisque elle répond aux équations :

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} V_{z0}^{z}$$

et :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = r W_{z_0}^{z}.$$

Pour une même valeur de z, on a à la fois même v et même θ ; A étant un point de la courbe c', pour avoir un point A′ de la courbe c'', on mènera d'abord l'horizontale AA′ ; on joindra $A\varpi'$, qui coupe l'ordonnée NC′ en un point n ; on mènera nn'' horizontale, puis $\varpi n'$, qui coupera l'horizontale AA′ au point cherché.

3° Toutes les courbes (v^2, c) ont même asymptote horizontale :

$$\frac{1}{2}\mu(v_\infty^2) = \frac{10 f\varpi}{\gamma - 1}.$$

A l'origine, elles ont pour tangente :

$$\left(\frac{dv^2}{dc}\right)_0 = \frac{20}{\mu} P_0,$$

CHAPITRE VII

LES POUDRES A COMBUSTION CONSTANTE

§ 1. — Formules et propriétés des poudres a combustion constante

142. **Intérêt de cette étude.** — Les poudres à *combustion constante* sont la limite entre les poudres *dégressives*, telles que la plupart des poudres actuellement en service, et les poudres *progressives*, telles que les poudres américaines à 7 trous. Leur mode de combustion correspondrait à l'hypothèse théorique d'une vitesse d'inflammation infinie et d'une combustion par tranches parallèles d'une bande dont la surface latérale est négligeable devant la surface totale ou encore d'une poudre tubulaire à un seul trou brûlant de la même façon.

L'hypothèse qui définit les poudres à *combustion constante* rend les équations du mouvement particulièrement simples, et leurs conséquences faciles à saisir. Constituant déjà une première approximation pour les poudres actuelles, on peut pousser leur étude très loin et traiter, alors, des problèmes très importants, mais d'une complication qui les rend inabordables dans le cas général ; leurs conséquences peuvent cependant, à titre approximatif tout au moins, être étendues au cas des poudres usuelles, et employées, comme une première approximation, dans les formules complètes.

Ce cas limite des poudres actuelles comporte, à son tour, un autre cas-limite, caractérisé par l'hypothèse $z_0 = 0$: ce serait, par exemple, le tir dans un canon avec un projectile dont les ceintures ont été entaillées préalablement à la demande des rayures de l'âme, de manière à ce que la pression de forcement soit nulle. C'est cette première hypothèse que nous examinerons d'abord, et qui correspond au plus haut degré de simplicité que peuvent acquérir les théories de la Balistique Intérieure.

Il y a lieu d'observer que, dans le cas actuel, où nous supposons $\beta = 0$ et $z_0 = 0$, les formules donnent *rigoureusement* la solution du problème de la Balistique Intérieure, et non plus seulement le premier terme de la série (89).

143. **Formules de la vitesse.** — Nous supposons donc, pour étudier ce cas-limite de simplicité maximum :

1° que la *fraction de forcement* z_0 est nulle : $z_0 = 0$;

2° que la *fonction de forme* $\varphi(z) = (1 - z)^\beta$ admet un exposant $\beta = 0$; de telle sorte que $\varphi(z) = 1$.

Par suite, les fonctions **M** et **N** prennent les valeurs suivantes :

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{\varphi(z)}{dz} = z$$

$$\mathbf{N}(z) = \int_0^z \frac{\mathbf{M}dz}{z\varphi(z)} = z.$$

Les formules de la vitesse (110) deviennent donc :

1° Avant la fin *de la combustion* de la poudre.

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} z, \qquad 1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \mathbf{r}z$$

avec :

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2.$$

On peut alors éliminer la *fraction brûlée* z et obtenir, explicitement, la formule de la vitesse v sous la forme

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} \frac{1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\mathbf{r}}$$

ou encore :

$$v = \frac{2}{\gamma - 1} 10 f \varpi \frac{A}{\sigma} \left[1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right].$$

2° Au moment où cesse la combustion de la poudre, on a, pour la vitesse V_1 *de stricte combustion* et le point θ_1, les formules

$$V_1 = \frac{\sigma}{A\mu}$$

et :

$$\theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = 1 - \mathbf{r}.$$

On peut, en outre, entre V_1 et c_1, écrire la formule qui élimine la *vivacité* A :

$$\mu V_1^2 = \frac{2}{\gamma - 1} 10 f \varpi \left[1 - \theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}}\right].$$

3° Après la *fin de la combustion*, comme :

$$\mathbf{W}_0^1 = 1$$

on aura, pour le paramètre **s**, la formule :

$$\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}\mathbf{W}^{1}_{\zeta_0} = 1 - \mathbf{r}$$

et l'équation générale du numéro 110, pourra s'écrire simplement :

$$v^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \left[1 - \frac{\theta^{\gamma - 1}}{1 - \mathbf{r}} \right].$$

144. **Pressions.** — 1° Avant la *fin de la combustion*, on aura en fonction de z :

$$P = P' z \left[1 - \mathbf{r} z\right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$$

et en fonction de θ :

$$P = \frac{P'}{\mathbf{r}} \left[1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} \right] \theta^{\frac{\gamma + 1}{2}}$$

C'est, explicitement, l'équation de la courbe des pressions dans l'âme.

2° A la *fin de la combustion*, on a :

$$P_1 = P' (1 - \mathbf{r})^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}.$$

3° Après la *fin de la combustion* :

$$P = \frac{P'}{1 - \mathbf{r}} \theta^{\gamma}.$$

145. **Formules de la pression maximum.** — Puisque, dans le cas actuel :

$$\mathbf{V}^{\zeta}_{\eta} = \zeta \quad \text{et} \quad \mathbf{W}^{\zeta}_{0} = \zeta.$$

les fonctions, **P**, **Q**, et **R** du numéro 111, deviennent :

$$Q_0^\zeta = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\zeta$$

$$P_0^\zeta = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$R_0^\zeta = \zeta\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

et les formules de la pression maximum sont :

$$\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{1}{r} = \zeta$$

$$\frac{\chi-\varpi'}{c'-\varpi'} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$P_M = P'\zeta\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

On peut éliminer ζ entre la première et la troisième de ces équations, et il viendra les deux seules relations :

$$\frac{\chi-\varpi'}{c'-\varpi'} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$P_M = \frac{10}{\gamma}\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\frac{\mu A^2}{\sigma^2}\frac{(f\varpi)^2}{c'-\varpi'}$$

On peut encore écrire celle-ci :

$$P_M = \frac{\gamma-1}{2\gamma}\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\frac{P'}{r}.$$

La pression maximum est donc donnée par une formule monôme de forme très simple.

146. **Théorèmes sur la vitesse.** — Nous allons passer en revue, sous forme de théorèmes, les principales propriétés du mouvement représenté par les équations des numéros précédents.

Théorème I. — La vitesse v du projectile est proportionnelle à la fraction brûlée z.

Cela résulte de l'équation :

$$\mu v = \frac{\sigma}{A} z.$$

Le poids ϖ de la charge n'entre dans cette formule que par le facteur :

$$\mu = \frac{p + \vartheta\varpi}{g}$$

et la vitesse v est ainsi d'autant plus faible, pour une même valeur de z, que le poids ϖ de la charge est plus grand.

Le paradoxe apparent que semble contenir ce théorème qui affirme que, par exemple, pour $z = 1$, c'est-à-dire à la fin de la combustion de la poudre, la vitesse du projectile est d'autant plus petite que le poids total ϖ de poudre brûlée est plus considérable, trouve son explication dans le fait que, à égalité de valeur de z, pour une charge petite, le projectile est beaucoup plus loin dans l'âme du canon que pour une charge plus forte.

D'ailleurs, on sait qu'au dessous d'une certaine charge ϖ_0, la poudre ne peut être complètement brûlée dans l'âme indéfinie d'un canon, et la vitesse V_1 ne peut jamais être atteinte si on n'a pas $\mathbf{r} < 1$, c'est-à-dire :

$$\varpi_0 < \frac{\gamma - 1}{20} \frac{\sigma^2}{A^2 \mu f}.$$

Le facteur $1 - \mathbf{r}$ qui figure dans l'expression de la vitesse d'après la fin de la combustion, et dont l'expression est :

$$1 - \mathbf{r} = 1 - \frac{\gamma - 1}{20} \frac{\sigma^2}{A^2 \mu f \varpi}$$

ne peut devenir négatif ; il varie entre 1 (pour $A = \infty$) et 0 pour la charge ϖ_0 limite déterminée ci-dessus ; $\mathbf{r}$ varie de 0 à 1.

Théorème II. — Avant la fin de la combustion de la poudre, dans un tir à charge constante (ϖ et A constant), mais avec des projectiles de poids différents, la vitesse est la même pour un même parcours du projectile dans l'âme.

C'est la traduction de l'équation (149.1°).

$$\frac{\sigma}{A} v = \frac{20}{\gamma - 1} f\varpi \left[1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right]$$

qui ne renferme pas μ.

Dans la figure du numéro 134, la courbe (v^2, c) pour un projectile quelconque, se confond donc avec la courbe de *stricte combustion* jusqu'au point (V_1, c_1) ; elle s'en détache ensuite pour s'approcher de plus en plus de l'asymptote

$$v_\infty^2 = \frac{20}{\gamma - 1} \frac{f\varpi}{\mu}$$

ainsi qu'on le voit sur l'équation :

$$v^2 = \frac{\gamma - 1}{20} \frac{f\varpi}{\mu} \left[1 - \frac{\theta^{\gamma - 1}}{s}\right]$$

qui donne la vitesse après combustion totale et où θ tend vers zéro.

Théorème III. — La courbe (v^2, c) part tangentiellement à l'axe des c.

On a en effet ;

$$\mu \frac{dv}{dc} = \frac{\sigma}{A} \frac{dz}{dc}$$

et comme :

$$\frac{dz}{dc} = \frac{10}{\sigma v} A\varphi(z) P$$

on aura, pour $\varphi(z) = 1$:

$$\mu \frac{vdv}{dc} = 10 \text{ P}.$$

Comme $P = 0$, à l'origine des c $(z_0 = 0)$, on a :

$$\frac{dv^2}{dc} = 0$$

ce qui démontre le théorème.

147. **La courbe des vitesses** (v^2, c). — La figure du numéro 125, devient alors la figure ci-contre où les quatre courbes qui interviennent dans la question, ont les équations suivantes :

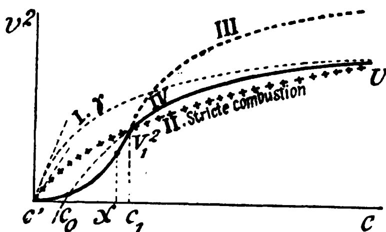


Fig. 41.

I. *Courbe adiabatique* γ *de combustion instantanée :*

$$u^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f\varpi}{\mu} \left[1 - \theta^{\gamma - 1}\right]$$

Tangente à l'origine $\left(\frac{du^2}{dc}\right)_0 = \frac{20P'}{\mu}$

Vitesse à l'∞ : $U^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f\varpi}{\mu}$.

II. *Courbe de stricte combustion :*

$$V_1^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \left[1 - \theta_1^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right]$$

Tangente à l'origine : $\left(\frac{dV_1^2}{dc}\right)_0 = \frac{10 P'}{\mu}$

Vitesse à l'∞ : $(V_1^2)_\infty = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} = U^2.$

III. *Courbe des vitesses v^2 avant la fin de la combustion.*

$$v^2 = \left(\frac{2}{\gamma - 1} 10 f \varpi \frac{A}{\sigma}\right)^2 \left[1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right]^2$$

Tangente à l'origine : $\left(\frac{dv^2}{dc}\right)_0 = 0$

Vitesse à l'∞ ; $(v^2)\infty = \left(\frac{2}{\gamma - 1} 10 f \varpi \frac{A}{\sigma}\right)^2$

et par suite : $(v^2)\infty = V_1 U.$

Inflexion au point χ tel que :

$$\theta_\chi = \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right]^{-\frac{2}{\gamma - 1}}.$$

IV. *Courbe des vitesses v^2 après la fin de la combustion :*

$$v^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \left[1 - \frac{\theta^{\gamma - 1}}{1 - r}\right].$$

Elle coupe l'axe des c en un point tel que :

$$\theta_0^{\gamma - 1} = 1 - r$$

et on a :

$$\theta_0^2 = \theta_1,$$

On a donc :

$$(c_1 - \varpi')^2 = (c' - \varpi')(c_1 - \varpi')$$

L'axe des v^2 est coupé en un point tel que :

$$v_0^2 = -\frac{2}{\gamma - 1}\frac{10 f\varpi}{\mu}\frac{1}{1 - \mathbf{r}}$$

On a enfin :

$$(v^2)_\infty = U^2.$$

148. **Théorèmes sur la pression maximum.**

Théorème I. — Quelle que soit la vivacité A d'une poudre, pour un même poids ϖ *de la charge, le maximum de pression se produit au même point de l'âme.*

On a, en effet, pour déterminer le point χ où se produit le maximum de pression, la formule

$$\frac{\chi - \varpi'}{c' - \varpi'} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

et le second membre est une constante.

Théorème II. — Il existe des poudres (A variant, ϖ *constant) qui n'ont pas de maximum de pression réel.*

Ce sont celles dont la courbe des pressions rencontre la courbe de *stricte combustion* en un point plus voisin de l'origine que le point χ. Pour celles-là, la poudre est complètement brûlée avant que la pression maximum n'ait, analytiquement, pu se produire.

La limite des poudres à pression maximum *réelle* et à pression maximum *imaginaire* est donnée par la condition $\zeta = 1$, dans les formules de la pression maximum (144).

On aura ainsi :

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}$$

ou, en remplaçant r par sa valeur :

$$\frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2$$

il viendra :

$$\frac{10}{\gamma} \frac{A^2 \mu f \varpi}{\sigma^2} = 1$$

et

$$P_M = P' \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

La première relation donne la condition pour que le maximum soit réel ; la réalité dépend de la valeur du produit variable $A^2\mu\varpi$ qui doit être inférieur à la constante $\frac{\gamma\sigma^2}{10 f}$.

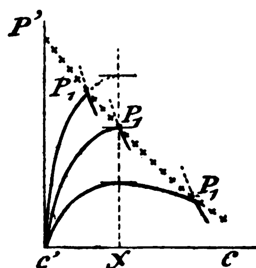


Fig. 42.

Ainsi, dans les trois genres de tir, A *variable* — μ *variable* — ϖ *variable*, on arrivera, pour des valeurs des variables, A, μ, ϖ, dépassant certaines limites, au cas d'une pression maximum imaginaire.

La formule qui donnera la pression *maximum* pour des valeurs supérieures sera alors :

$$P_1 = P' (1 - r)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

c'est-à-dire la pression de *stricte combustion* (fig. 42).

Théorème III. — Quand la charge ϖ augmente, le point de pression maximum se rapproche de l'origine.

En effet, l'expression :

$$\chi - \varpi' = (c' - \varpi') \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

donne, pour χ, un maximum χ_m quand $\varpi' = 0$. On a donc :

$$\chi_m = c' \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}.$$

Pour $\varpi' = c'$, on a : $\chi = \varpi'$; donc : $\chi = c'$.

Pendant que χ varie de χ_m à c', la pression maximum varie de o à ∞, pour des charges de poudre croissantes.

La distance maximum trouvée

$$\frac{\chi_m}{c'} = \rho_m = \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

constitue, ainsi, une limite de la position où peut se produire, dans l'âme, la pression maximum, quelle que soit la *poudre* (A), la *charge* (ϖ), le *poids du projectile* (μ), employés pour le tir.

Lorsque la pression maximum, pour une charge croissante, est représentée par la courbe de combustion stricte, on a, pour le point où se produit le maximum :

$$\theta_1^{\frac{\gamma - 1}{2}} = 1 - \mathbf{r} ;$$

le point c_1 se rapproche ensuite de l'origine à mesure que ϖ augmente.

Théorème IV. — La courbe (P_M, χ), *lieu des points de pression maximum, quand la charge* ϖ *varie, est une conique.*

On a effet, d'une part :

$$P_M = q \frac{\varpi'^2}{c' - \varpi'},$$

q étant une constante, et d'autre part :

$$\chi - \varpi' = q' (c' - \varpi')$$

q' étant une constante ; on tire de la seconde

$$\varpi' = \frac{q'c' - \chi}{q - 1}$$

et en remplaçant, dans P_M, ϖ' par cette valeur, il viendra :

$$P_M (\chi - c') = q (q - 1) (q'c' - \chi)^2.$$

Mais, pour une charge nulle, on a, en désignant par χ_m la valeur correspondant à cette charge :

$$q'c' = \chi_m$$

On a donc :

$$P_m (\chi - c') = q (q - 1) (\chi_m - \chi)^2$$

ce qui est l'équation de l'hyperbole H de la figure.

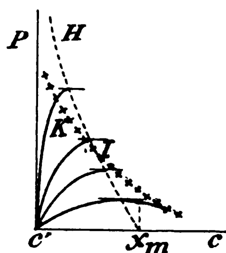


Fig. 43.

A partir d'un certain point I, l'hyperbole H est remplacée par une autre courbe K, qu'on obtiendra en éliminant ϖ entre les équations :

$$P_1 = P' [1 - \mathbf{r}]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

et :

$$\theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = 1 - \mathbf{r}.$$

On voit aisément que la courbe a comme asymptotes les deux axes.

149. **Courbe(ϖ, P_M) des pressions maxima, en fonction des charges ϖ.** — Supposons qu'on tire une même poudre (A const.) avec des charges ϖ croissantes, et cherchons les propriétés de la courbe qui représentera les variations corrélatives de la pression maximum.

1° Ne laissant en évidence, dans la formule qui donne P_M, que les termes qui renferment la charge ϖ, on écrira :

$$P_M = K \frac{(p + \vartheta\varpi)\varpi^2}{c' - \varpi'}$$

avec :

$$K = \frac{10}{\gamma} \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{A^2 f^2}{\sigma^2}$$

C'est l'équation du *troisième* degré en ϖ qui représente la loi de variation cherchée.

On en déduit d'abord la dérivée :

$$\frac{dP_M}{P_M} = \left(\frac{\vartheta}{p + \vartheta\varpi} + \frac{2}{\varpi} + \frac{\eta}{c' - \varpi'}\right) d\varpi.$$

La courbe I part de l'origine avec une tangente horizontale ; elle croit constamment avec ϖ et admet une asymptote verticale pour $c' = \varpi'$.

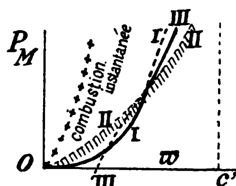


Fig. 44.

2° Mais, une seule portion de la courbe est valable ; c'est celle où la pression maximum est réelle. Le point limite D est donné par une charge

$$\frac{p + \vartheta\varpi}{g}\varpi = \frac{\gamma - 1}{20} \frac{\sigma^2}{A^2 f}$$

qui correspond à une pression :

$$P_M = P' \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = \frac{f\varpi}{c'-\varpi'}\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Cettedernière relation représente une courbe (II) des P_M en fonction de ϖ qui sépare le plan en deux régions, celle des pressions maxima réelles et celle des pressions maxima imaginaires ; c'est une hyperbole équilatère passant à l'origine et ayant pour asymptotes

$$\varpi' = c' \quad \text{et} \quad -f\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

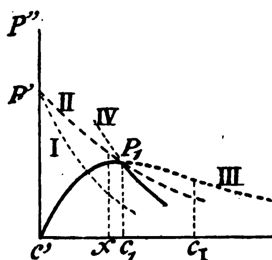


Fig. 45.

Elle est homothétique de la courbe de combustion instantanée représentée par l'hyperbole :

$$P' = \frac{f\varpi}{c'-\varpi'}.$$

3° Après le point D, la courbe $(\varpi,\ P_M)$, est représentée par une courbe III dont l'équation est :

$$P = \frac{f\varpi}{c'-\varpi'}\left[1 - \frac{\gamma-1}{20}\,\frac{\sigma^2}{A^2\mu f\varpi}\right]^{\frac{\gamma+s}{\gamma-1}}.$$

150. **La courbe (P, c) des pressions dans l'âme. —** 1° On construira, comme au numéro 22, la courbe de *combustion instantanée* (I)

$$P = P'\theta^{\gamma}$$

et la courbe de *stricte combustion* (II)

$$P = P'\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

2° La courbe (P, c) avant combustion (III), répond à l'équation :

$$P = \frac{P'}{r}\left[\theta^{\frac{\gamma+1}{2}} - \theta^{\gamma}\right].$$

Donc, en un point c de l'âme, la pression P est proportionnelle à la différence des pressions des deux courbes adiabatiques $\frac{\gamma+1}{2}$ et γ.

On a, en un point quelconque de cette courbe (P, c) des pressions, la formule :

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{P'}{r}\left[\frac{\gamma+1}{2}\,\theta^{\frac{\gamma-1}{2}} - \gamma\theta^{\gamma-1}\right];$$

mais :

$$\theta = \frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'};$$

donc :

$$d\theta = -\frac{c' - \varpi'}{(c - \varpi')^2}\,dc = -\frac{\theta^2}{c' - \varpi'}\,dc$$

Il vient ainsi :

$$\frac{dP}{dc} = -\frac{P'}{c' - \varpi'}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\gamma+1}{2}\,\theta^{\frac{\gamma+3}{2}} - \gamma\theta^{\gamma+1}\right)$$

A l'origine, pour $\theta = 1$, on aura :

$$\left(\frac{dP}{dc}\right)_0 = \frac{\gamma - 1}{2r}\,\frac{P'}{c' - \varpi'}.$$

La tangente à l'origine est donc inclinée sur l'axe des c.

La quantité $\frac{dP}{dc}$ s'annule pour :

$$\theta_\chi^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{\gamma+1}{2\gamma}$$

ce qui, ainsi qu'on le voit, est la position du maximum de pression.

3° Le point P_1 de la fin de la combustion, est tel que :

$$P_1 = P'(1-r)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

et :

$$\theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = 1 - r.$$

La courbe IV est la courbe des pressions après combustion dont l'équation est :

$$P = \frac{P'}{1-r}\,\theta^\gamma.$$

4° Il existe sur la courbe (P, c) un point d'inflexion obtenu en égalant $\frac{d^2P}{dc^2}$ à zéro. On trouve :

$$\theta_i^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{\gamma+3}{4\gamma}$$

Comme $\gamma > 1$, on a toujours $\theta_i < \theta_\chi$. Le point d'inflexion est donc situé après le point de pression maximum.

Il sera avant ou après le point θ_1 où finit la combustion, selon que $\frac{\gamma+3}{4\gamma}$ sera plus grand ou plus petit que $1-r$.

151. **Résumé des formules des poudres à combustion constante.** — Un tableau analogue à celui des

numéros 110 et 111 deviendra, pour les poudres à combustion constante, le suivant :

Le *paramètre* **r** a pour expression :

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2.$$

1. *Formules de la vitesse et de la pression.*

Premier cas. — La poudre n'est pas complètement brûlée.

a) En un point quelconque :

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} z$$

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{r}z$$

$$P = P'z\,[1 - \mathbf{r}z]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

ou, en éliminant z :

$$v = \frac{\sigma}{A\mu\mathbf{r}} \left[1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]$$

$$P = \frac{P'}{\mathbf{r}} \left[1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right] \theta^{\frac{\gamma+1}{2}}$$

b) A la bouche du canon :

$$V_0 = \frac{\sigma}{A\mu\mathbf{r}} \left[1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]$$

$$P_B = \frac{P'}{\mathbf{r}} \left[1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right] \theta^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Fin de la combustion de la poudre.

$$V_1 = \frac{\sigma}{A\mu}; \quad 1 - \theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{r}; \quad P_1 = P'\,[1 - \mathbf{r}]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Deuxième cas. — La poudre est complètement brûlée.

c) En un point quelconque

$$v^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \left[1 - \frac{\theta^{\gamma - 1}}{1 - \mathbf{r}} \right]$$

$$P = \frac{P'}{1 - \mathbf{r}} \theta^{\gamma}.$$

d) A la bouche du canon :

$$V_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \left[1 - \frac{\theta^{\gamma - 1}}{1 - \mathbf{r}} \right]$$

$$P_B = \frac{P'}{1 - \mathbf{r}} \theta^{\gamma}.$$

2. *Pression maximum.*

$$\theta_\chi = \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

$$P_M = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right]^{-\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \frac{P'}{\mathbf{r}} = \frac{10}{\gamma} \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right]^{-\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \frac{\mu A^2}{\sigma^2} \frac{(f \varpi)^2}{c' - \varpi'}$$

$$\zeta = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1}{\mathbf{r}}.$$

Cette formule est applicable pour les valeurs de $\zeta < 1$, ou :

$$\mathbf{r} > \frac{\gamma - 1}{2\gamma}.$$

Pour les valeurs inférieures de $\mathbf{r}$, la pression maximum est donnée par les formules de stricte combustion :

$$P_1 = P' [1 - \mathbf{r}]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$$

$$\theta_1^{\frac{\gamma - 1}{2}} = 1 - \mathbf{r}.$$

§ 2. — La poudre du maximum de puissance

152. **Enoncé du problème.** — Ce problème dit « *de la poudre du maximum* » est très important au point de vue pratique, puisqu'il permet l'utilisation la meilleure d'une bouche à feu de résistance donnée et de dispositions intérieures C et c' connues ; il s'énonce ainsi : *Etant donnée la valeur de la pression maximum* P_M *qu'on se fixe à l'avance, trouver la poudre* A *et le poids* ϖ *de cette poudre qui donneront le maximum de puissance, c'est-à-dire la plus grande valeur de l'énergie à la bouche* μV_0^2.

Ce problème est résolu par le théorème suivant :

153. **Théorème de la stricte combustion.** — *A égalité de pression maximum, la poudre dont la combustion s'achève exactement au moment où le projectile franchit la bouche du canon, donne la plus grande énergie à la bouche.*

1° La formule de la pression maximum est :

$$P_M = \frac{10}{\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{\mu A^2}{\sigma^2} f \varpi P'.$$

Si donc on suppose la pression maximum P_M constante, on aura, entre les éléments du chargement, la relation :

$$\frac{\mu A^2}{\sigma^2} f \varpi P' = \frac{\gamma}{10}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} P_M = \gamma_1 P_M$$

2° La vitesse initiale, avant la fin de la combustion de

la poudre (150), peut s'écrire, en multipliant chaque membre par μ :

$$\mu V_0^2 = \left(\frac{20}{\gamma - 1} \frac{f \varpi A}{\sigma}\right)^2 \mu \left[1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right]^2.$$

L'élimination de la vivacité A entre cette équation et la relation de condition imposée à la pression maximum donnera :

$$\mu V_0^2 = \left(\frac{20}{\gamma - 1}\right)^2 f \varpi \gamma_1 \frac{P_M}{P'} \left[1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right]^2$$

ou encore :

$$\mu V_0^2 = \gamma_1 \left(\frac{20}{\gamma - 1}\right)^2 P_M (c' - \varpi') \left[1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right]^2$$

avec :

$$\theta = \frac{c' - \varpi'}{C - \varpi'}.$$

Cette relation, quand ϖ varie, représente, en fonction de ϖ, la courbe des énergies à la bouche, à *pression maximum constante.*

Nous figurons cette courbe sur la figure ci-dessous.

Pour $\varpi = 0$, on a :

$$\mu V_0^2 = \gamma_1 \left(\frac{20}{\gamma - 1}\right)^2 P_M c' \left[1 - \left(\frac{c'}{C}\right)^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right]^2$$

C'est le point D de l'axe des μV_0^2.

Quand ϖ croit, c'est-à-dire quand la vivacité A diminue de manière à conserver toujours la même pression maximum, le produit μV_0^2 diminue jusqu'à la valeur zéro qui est atteinte pour la valeur $\varpi' = c'$. C'est un point de l'axe des ϖ.

La courbe I de la figure est donc la courbe des énergies

initiales en fonction des charges, dans l'hypothèse analytique d'une poudre non complètement brûlée avant la sortie du projectile.

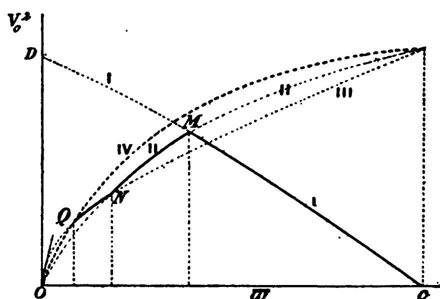


Fig. 46.

3° Lorsque la poudre est totalement brûlée au moment de la sortie du projectile, on a (150) :

$$\mu V_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\, 10 f \varpi \left[1 - \frac{\theta^{\gamma - 1}}{1 - \mathbf{r}} \right]$$

où le paramètre **r** a pour valeur :

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu} \right)^2.$$

Ce paramètre devient, dans le cas actuel d'une pression maximum constante :

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{20} \frac{P'}{\gamma_1 P_M}.$$

On aura donc :

$$\mu V_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\, 10 f \varpi \left[1 - \frac{\theta^{\gamma - 1}}{1 - \frac{\gamma - 1}{20} \frac{f \varpi}{c' - \varpi} \frac{1}{\gamma_1 P_M}} \right].$$

Cette courbe part de l'origine, pour $\varpi = 0$.

Pour $\varpi = c'$, la parenthèse s'écrira :

$$1 - \frac{(c' - \varpi')^{\gamma - 1}}{(C - \varpi')^{\gamma - 1}} \frac{c' - \varpi'}{(c' - \varpi') - \frac{\gamma - 1}{20} f\varpi \frac{1}{\gamma_1 P_M}}$$

et a pour limite zéro.

On aura donc, pour $\varpi' = c'$:

$$\mu V_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1} 10 f c'.$$

C'est la courbe II des énergies initiales à pression maximum constante.

4° Les deux courbes I et II se coupent en un certain point M, qui correspond à l'énergie initiale obtenue avec une poudre qui brûle exactement dans l'âme. C'est la poudre *de stricte combustion.*

Elle correspond à une *charge* $\varpi_{max.}$ et à une *vivacité* A_{max}.

L'énergie initiale maximum est égale à l'énergie initiale de la poudre de *stricte combustion.*

Or, on a :

$$V_1 = \frac{\sigma}{A\mu}$$

d'où :

$$\mu V_1^2 = \left(\frac{\sigma}{A}\right)^2 \frac{1}{\mu} = \frac{f\varpi P'}{\gamma_1 P_M}$$

et d'autre part :

$$1 - \theta_1^{\frac{\gamma - 1}{2}} = r.$$

Remplaçant r par sa valeur, il viendra :

$$\theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = 1 - \frac{\gamma - 1}{20} \frac{P'}{\gamma_1 P_M}$$

ce qui permet de déterminer la valeur de ϖ.

On écrira à cet effet :

$$\left(\frac{1-\Delta}{q-\Delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = 1 - \frac{20}{\gamma-1} \frac{f}{\gamma_1 P_M} \frac{\Delta}{1-\Delta}$$

ou bien :

$$\frac{1-\Delta}{\Delta}\left[1 - \left(\frac{1-\Delta}{q-\Delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right] = \frac{20}{\gamma-1} \frac{f}{\gamma_1 P_M} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{1}{\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{f}{P},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{f}{P_M} = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{1-\Delta}{\Delta}\left[1 - \left(\frac{1-\Delta}{q-\Delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right].$$

Il suffira d'avoir une table à double entrée de la fonction de Δ et de q qui figure au second membre pour pouvoir déterminer la densité de chargement, qui, pour une pression maximum donnée, conduit à l'énergie maximum à la bouche.

5° Comme le volume c' est connu, on saura déterminer la charge ϖ à employer.

L'énergie initiale maximum sera donnée par la formule :

$$\mu V_0^2 = \frac{10}{\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} f\varpi \frac{P'}{P_M},$$

et la *poudre du maximum* sera définie par la relation :

$$A^2 = \frac{\gamma}{10}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{P_M}{f\varpi P'} \frac{\sigma^2}{\mu}.$$

154. **Discussion.** — 1° Mais la démonstration précédente suppose que la pression maximum est réelle (147). Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans celui-ci où la poudre est brûlée totalement avant que le maximum ne puisse se produire, la pression maximum P_1, c'est-à-dire celle de stricte combustion, est donnée par la formule :

$$P_1 = P'[1 - \mathbf{r}]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

La vitesse initiale après combustion étant :

$$\mu V_0^2 = \frac{2}{\gamma-1}\, 10 f\varpi\left[1 - \frac{\theta^{\gamma-1}}{1-\mathbf{r}}\right],$$

on aura, pour l'énergie à pression P_1 constante, la formule :

$$\mu V_0^2 = \frac{2}{\gamma-1}\, 10 f\varpi\left[1 - \theta^{\gamma-1}\left(\frac{P'}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right].$$

Cette équation définit une courbe (III) à pression P_1, qui passe par l'origine et par le point :

$$\mu V_0^2 = \frac{2}{\gamma-1}\, 10 f c',$$

pour $\varpi = c'$.

2° Construisons, en outre, sur la même figure, la courbe IV des énergies initiales qu'on obtiendrait en supposant la poudre instantanément brûlée pour chaque charge ϖ de poudre.

Elle aura pour équation :

$$\mu V_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1} 10 f \varpi \left[1 - \theta^{\gamma - 1} \right].$$

Elle passe aux points o et :

$$\mu V_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1} 10 f c',$$

pour $\varpi = c'$.

Ce sera la courbe (IV) *dite de combustion instantanée.*

3° Voici alors comment se passent les choses.

Nous supposons que la *pression maximum* reste constante pour chaque coup de canon et qu'on fasse varier la poudre, c'est-à-dire ϖ et A.

Nous commencerons le tir avec une poudre infiniment lente (A = o) à une densité de chargement $\Delta = 1$. La vitesse initiale est nulle (analytiquement).

On emploiera une poudre plus vive (A croit, ϖ diminue) : la vitesse initiale croit et suit la courbe I.

La poudre est d'abord incomplètement brûlée quand le projectile sort de la bouche ; mais pour une certaine valeur de A et de ϖ on arrive à la poudre de *stricte combustion* au point *anguleux* M.

Le diagramme abandonne la courbe (I), pour prendre la courbe (II). La vitesse en M est la *vitesse maximum* réalisable dans ce canon (c' et C donnés).

On voit que ce point ne présente pas le véritable caractère d'un *maximum*, étant défini par la rencontre de deux courbes et non par une expression analytique de maximum. Dans le voisinage de ce maximum, la vitesse ne varie donc pas comme une quantité du second ordre relativement à la variation du premier ordre de la vivacité A.

D'ailleurs, on remarquera que dans la démonstration, on n'a nullement cherché à égaler à zéro la dérivée $\frac{dV_0}{d\varpi}$.

La vitesse décroit ensuite quand on augmente la vivacité de la poudre en diminuant le poids ϖ ; on suit la courbe II. Mais, on arrive en N, au point-limite des pressions maxima réelles et imaginaires. Le diagramme passe de la courbe (II) à la courbe (III) et vient aboutir sur la courbe (IV) de combustion instantanée, en un point tel qu'on ait, pour une charge ϖ_1 :

$$P_M = \frac{f\varpi_1}{c' - \varpi_1'},$$

c'est-à-dire la pression P' obtenue en vase clos.

Tel est le tracé, sur la surface (V_0^2, ϖ) de la courbe qu'on pourrait appeler *isobare* de la pression maximum.

4° *Remarque.* — Si on suppose que la pression maximum est imaginaire, il faudrait chercher l'intersection des courbes I et III ; on obtiendrait, au lieu de la relation du n° 152. 4, une équation entre $\frac{f}{P_1}$ et Δ qu'il est facile de former. Nous n'examinerons pas ce cas.

155. **La surface** (V_0^2, ϖ). — Nous sommes en mesure, maintenant, de tracer les courbes diverses des vitesses initiales en fonction des charges, quand on fait un tir avec les différentes poudres, c'est-à-dire lorsque la vivacité varie.

1° Traçons en premier lieu la courbe des vitesses de *combustion instantanée* définie par l'équation :

$$V_0^2 = \frac{20}{\gamma - 1} \frac{f\varpi}{\mu} \left[1 - \theta^{\gamma - 1}\right].$$

Elle a pour tangente, à l'origine :

$$\frac{dV_0^2}{d\varpi} = \frac{20}{\gamma - 1}\frac{f}{\mu}\left[1 - \frac{1}{q^{\gamma-1}}\right]$$

et elle se termine au point :

$$(V_0^2)_{c'} = \frac{20}{\gamma - 1}\frac{fc'}{\mu}$$

pour $\varpi = c'$.

2° Cherchons maintenant, dans le plan, le lieu du point M quand A varie, c'est-à-dire le lieu des points de maximum de vitesse initiale pour des pressions maxima croissantes et données.

Il suffira d'éliminer A entre la vitesse de stricte combustion :

$$V_0 = \frac{\sigma}{A\mu}$$

et l'équation de la vitesse initiale avant la fin de la combustion :

$$V_0 = \frac{2}{\gamma - 1} 10 f\varpi \frac{A}{\sigma}\left[1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]$$

ce qui donne :

$$V_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\frac{10 f\varpi}{\mu}\left[1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right].$$

Cette courbe ne diffère de la courbe de combustion instantanée que par l'exposant $\frac{\gamma - 1}{2}$ du terme dans le crochet.

La tangente à l'origine de cette courbe a pour expression :

$$\frac{dV_0^2}{d\varpi} = \frac{20}{\gamma - 1}\frac{f}{\mu}\left[1 - q^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]$$

q étant > 1, on voit que la tangente à cette courbe, que nous dirons de *stricte combustion,* est moins inclinée que celle de la courbe de *combustion instantanée.*

Les deux courbes se terminent au même point pour $\omega = c'$.

3° Prenons, maintenant, une des courbes (V_0^2, c) définie par une valeur A de la vivacité. Son équation sera :

$$V_0^2 = \left(\frac{2}{\gamma - 1}\right)^2 \frac{A^2(10 f \varpi)^2}{\sigma^2}\left[1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right]^2.$$

Ainsi, pour une même valeur de ϖ, les vitesses initiales, quand la poudre n'est pas totalement brûlée à la sortie du

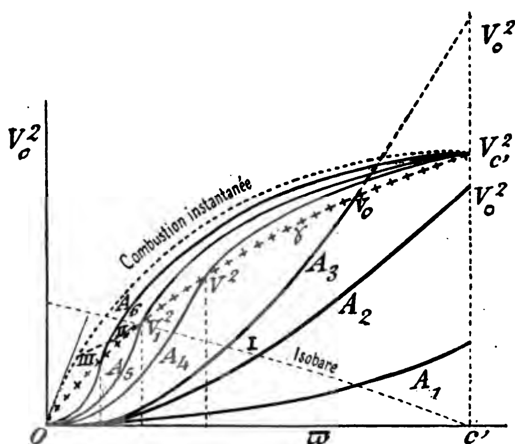


Fig. 47.

projectile de l'âme, sont proportionnelles à la vivacité des poudres.

La tangente à l'origine est *horizontale.* La courbe croit

jusqu'au moment où elle rencontre la courbe de *stricte combustion*, pour une vitesse :

$$V_1^2 = \left(\frac{\sigma}{\mu A}\right)^2.$$

Après ce point, les vitesses en fonction des charges seront représentées par l'équation :

$$V_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu}\left[1 - \frac{\theta^{\gamma-1}}{1 - \mathbf{r}}\right]$$

avec :

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2.$$

Toutes les courbes (V_0^2, ϖ) *quand la poudre est complètement brulée à la sortie du projectile, aboutissent au même point sur l'ordonnée* $\varpi' = c'$.

Quant aux poudres qui ne sont pas brûlées complètement à la sortie du canon, elles rencontrent l'ordonnée du point $\varpi' = c'$ à des hauteurs

$$V_0^2 = \left(\frac{2}{\gamma - 1}\right)^2 \frac{A^2}{\sigma^2} (10 f c')^2$$

qui diminuent quand A diminue.

Si V_a est le point de rencontre d'une courbe avant combustion complète avec l'ordonnée du point c' ;

$V_{c'}$ le point de convergence des courbes après combustion ;

V_1 la vitesse stricte de combustion, il est facile de démontrer qu'on a

$$V_a V_1 = (V_{c'})^2.$$

L'*isobare* correspondant à une pression maximum déterminée est composé des trois courbes (I) (II) et (III).

156. **Surface** Φ (V_0^2, P_M, ϖ). — En joignant au graphique ci-dessus des courbes (V_0^2, ϖ), le graphique établi au n° 148 des *pressions maxima* (P_M, ϖ) en fonction des charges, on obtient une surface dont l'importance pratique, pour l'étude expérimentale des poudres, est de premier ordre. Cette surface peut, en effet, être construite avec les deux nombres expérimentaux, la *vitesse initiale* et la *pression maximum* que l'on détermine dans les tirs courants avec les instruments de mesure usuels.

§ 3. — LE PROBLÈME DU CANON DE PUISSANCE MAXIMUM

157. **Enoncé du problème.** — L'artillerie navale doit se poser continuellement le problème du canon qui, sous un *poids donné* de la bouche à feu, tirant à une *pression maximum* fixée, a le rendement maximum, c'est-à-dire possède une énergie à la bouche aussi grande que possible.

On se donne le *volume total de l'âme* C et il s'agit de déterminer le volume c' de la chambre à poudre qui donne le *maximum* d'énergie initiale. Cette énergie est nulle aussi bien pour $c' = 0$ que pour $c' = C$. Elle présente donc un *maximum* entre ces deux limites.

158. **Solution du problème.** — 1. Nous avons trouvé au n° 152-4°, la relation

$$(1) \qquad Q = \frac{1-\Delta}{\Delta}\left[1 - \left(\frac{1-\Delta}{\eta-\Delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]$$

avec

$$(1^{bis}) \qquad Q = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{f}{P_M}$$

qui définit une fonction de Δ et de η telle que pour une pression *maximum* P_M imposée, l'énergie initiale soit maximum.

2° D'autre part, l'énergie initiale qui correspond à ces valeurs simultanées de Δ et de η est (152·5°)

$$\mu V_0^2 = \frac{10}{\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{1}{P_M} \frac{(f\varpi)^2}{c' - \varpi'}$$

ce qu'on peut écrire

$$(2) \quad \mu V_0^2 = \frac{10}{\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{f^2}{P_M} C \frac{\Delta}{1-\Delta} \frac{\varpi}{c'} \frac{c'}{C} = q \frac{\Delta^2}{1-\Delta} \frac{1}{\eta}$$

en posant

$$(2^{bis}) \qquad q = \frac{10}{\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{f^2 C}{P_M}.$$

3° Cherchons maintenant le maximum de puissance, c'est-à-dire le maximum de μV_0^2, en faisant $d(\mu V_0^2) = 0$. On aura

$$(3) \qquad \frac{2-\Delta}{1-\Delta} \frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{d\eta}{\eta}.$$

4° De la première équation

$$Q = \frac{1-\Delta}{\Delta}\left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)$$

on tirera, en différentiant

$$-\frac{d\Delta}{\Delta} - \frac{d\Delta}{1-\Delta} - \frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}{1-\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}\,\frac{d\theta}{\theta} = 0$$

et comme

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{d\Delta}{1-\Delta} - \frac{dq - d\Delta}{q-\Delta}$$

il viendra

$$-\frac{d\Delta}{1-\Delta} - \frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}{1-\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}\left(\frac{d\Delta}{1-\Delta} + \frac{dq-d\Delta}{q-\Delta}\right) = 0.$$

5° Remplaçant dq par sa valeur tirée de l'équation (3) et θ par $\frac{1-\Delta}{q-\Delta}$, il viendra

$$(4) \qquad \frac{\gamma-1}{2}\,\frac{2q-\Delta}{q-\Delta} = \left(\frac{q-\Delta}{1-\Delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1.$$

C'est une relation entre q et Δ qui existe pour les valeurs corrélatives de ces quantités, correspondantes à l'énergie maximum.

Elle peut se mettre sous la forme

$$(q-\Delta)^{\frac{\gamma+1}{2}} = \left(\gamma q - \frac{\gamma+1}{2}\Delta\right)(1-\Delta)^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

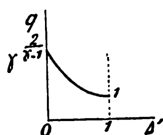


Fig 48.

On peut donc construire une courbe, ou calculer une table de cette fonction des deux variables q et Δ.

Pour $\Delta = 0$, on a

$$q_0 = \gamma^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

et pour $\Delta = 1$:

$$q_1 = 1.$$

5° Cette courbe pourra, au moyen de l'équation (1)

$$Q = \frac{1-\Delta}{\Delta}\left[1 - \left(\frac{1-\Delta}{q-\Delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]$$

être cotée pour les différentes valeurs de $\frac{f}{P_M}$, ce qui permettra de résoudre immédiatement le problème posé : connaissant la *pression maximum* P_M, déterminer la division *totale* q *de l'âme* et la *densité de chargement* Δ, qui donnent l'énergie maximum à la bouche.

6° Comme, d'autre part, le volume total C de l'âme est donné, on en déduira immédiatement le volume c' de la chambre à poudre par la formule

$$c' = \frac{C}{q}.$$

La *charge* sera obtenue par la relation $\varpi = \Delta c'$.

La *vitesse initiale* se calculera par la formule donnée précédemment

$$\mu V_0^2 = \frac{10}{\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} f\varpi \frac{P'}{P_M}$$

et la *poudre du maximum* sera définie par la relation

$$A^2 = \frac{\gamma}{10}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{P_M}{f\varpi P'}\frac{\sigma^2}{\mu}.$$

159. **Théorèmes sur les canons de puissance maximum.** — On peut résumer, sous forme de théorèmes, l'ensemble des conclusions établies ci-dessus pour les

canons de puissance maximum (Le volume total de l'âme C étant donné).

Théorème I. — Pour une même pression maximum P_M *fixée d'avance, tous les canons de puissance maximum ont même valeur* $q = \frac{C}{c'}$ *de la division totale de l'âme.*

Théorème II. — Tous ces canons tirent à la même densité de chargement Δ, mais, bien entendu, des poudres différentes.

Théorème III. — Le rapport $\frac{\mu V_0^2}{\varpi}$ *est une constante pour tous ces canons :* cela résulte de la formule de la vitesse initiale maximum de ces canons

$$\frac{\mu V_0^2}{\varpi} = \frac{10}{\gamma} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{f^2}{P_M} \frac{\Delta}{1 - \Delta}.$$

Théorème IV. — Si on considère un canon tirant des projectiles de poids différents, il sera le canon du maximum de puissance (P_M *donné*) *pour tous les projectiles, s'il l'est pour un seul. Les poids de poudre seront les mêmes, quel que soit le poids du projectile; mais la vivacité* A *devra varier avec le poids p.*

Comme on a : $V_0 = \frac{\sigma}{A\mu}$ pour la vitesse du maximum, on en déduit, d'après le théorème précédent, que le rapport $\frac{A^2\mu}{\sigma^2}\varpi$ est constant; et comme, ici, ϖ et σ sont fixes, on voit que le produit $A^2\mu$ devra être une constante. La vivacité A sera ainsi inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse μ du projectile ; mais le poids de la charge restera la même.

Théorème V. — Si dans un système d'artillerie, où les bouches à feu sont semblables et semblablement chargées, une bouche à feu est un canon du maximum, toutes les autres le sont également.

Cela résulte du théorème sur la similitude des bouches à feu : celles-ci ont, dans les conditions énoncées, même vitesse et même pression maximum.

160. **Problème de la meilleure utilisation d'une poudre.** — Des raisonnements et des calculs analogues à ceux qui ont été effectués dans les deux paragraphes précédents permettront de résoudre divers problèmes pratiques que rencontre le constructeur de canons.

Tel est le suivant : On suppose que les poudreries ne puissent fabriquer, parce que trop lente, la poudre A du maximum de puissance qui, dans un canon de C donné, correspondrait au volume c' de la chambre à poudre déterminée dans le problème du n° 157. On aura à résoudre alors le problème suivant : *Quel est le volume c' de la chambre à poudre d'un canon C qui, tiré avec la poudre A' fournira, à pression maximum donnée, le maximum d'énergie initiale ?*

§ 4. — Les poudres a combustion quasi-constante

161. **Définition.**— On appellera *poudres à combustion quasi-constante* celles qui admettent une fonction de forme développée en série

$$\varphi(z) = 1 - \lambda z + \lambda' z^2 + \dots$$

où les coefficients sont assez petits pour que les termes, à partir du second $\lambda' z^2$, soient négligeables devant l'unité, pour z prenant des valeurs de 0 à 1.

Nous allons chercher ce que deviennent les formules générales dans cette hypothèse $\varphi(z) = 1 - \lambda z$, avec la condition $z_0 = 0$. Ces formules pourront être considérées comme une seconde approximation relativement aux poudres ordinairement employées.

162. **Vitesse.** — 1° Les deux fonctions balistiques des poudres $\mathbf{M}(z)$ et $\mathbf{N}(z)$ prendront, alors, les valeurs suivantes :

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{dz}{1 - \lambda z} = \int_0^z (1 + \lambda z)\, dz = z\left(1 + \frac{\lambda}{2} z\right)$$

$$\mathbf{N}(z) = \int_0^z \frac{\mathbf{M}(z)}{z(1 - \lambda z)}\, dz = \int_0^z \left(1 + \frac{\lambda}{2} z\right)(1 + \lambda z)\, dz = z\left(1 + \frac{3}{4} \lambda z\right)$$

2° *Vitesse avant la fin de la combustion*

Les deux formules (110)

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} \mathbf{M}(z)$$

$$1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \mathbf{r}\mathbf{N}(z)$$

deviennent alors :

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} z\left(1 + \frac{\lambda}{2} z\right)$$

$$1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \mathbf{r} z\left(1 + \frac{3}{4} \lambda z\right)$$

Eliminant z entre ces deux relations, il viendra d'abord

$$\frac{\sigma}{A} v = \frac{20}{\gamma - 1} f\varpi \left[1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right] \left[1 - \frac{\lambda}{4} z\right],$$

puis :

$$\frac{\sigma}{A} v = \frac{20}{\gamma - 1} f\varpi \left[1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}\right] \left[1 - \frac{\lambda}{4} \frac{1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}}{\mathbf{r}}\right]$$

formule binôme qui résoud le problème en faisant connaître la vitesse v en fonction de θ.

On rappelle que

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2.$$

3° *Vitesse après la fin de la combustion.* — Dans la formule générale du n° 110, il faudra faire

$$V_1 = \frac{\sigma}{A\mu}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right), \quad \mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}$$

$$\mathbf{N}(1) = 1 - \mathbf{r}\left(1 + \frac{3}{4}\lambda\right).$$

On aura ainsi, en portant ces valeurs dans la formule

$$v^2 = V_1^2 + \frac{20 f\varpi}{\gamma - 1 \mu}\left[\mathbf{s} - \frac{\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}}\right]$$

l'équation

$$v^2 = \frac{20}{\gamma - 1} \frac{f\varpi}{\mu}\left[1 - \frac{\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}}\right]\left[1 - \frac{\lambda \mathbf{r}}{4}\left[\frac{3\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}^2} - 1\right]\left[1 - \frac{\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}}\right]^{-1}\right]$$

ce qui résoud le problème par une formule binôme.

163. **Pressions.**

1° *Avant la fin de la combustion.*

Les formules du n° 110 deviennent, en y remplaçant $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$ par $z\left(1 + \frac{3}{4}\lambda z\right)$

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \mathbf{r} z \left(1 + \frac{3}{4}\lambda z\right)$$

$$P = P' z \theta^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

d'où on tire

$$P = \frac{P'}{r}\,\theta^{\frac{\gamma+1}{2}}\left[1-\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]\left[1-\frac{3}{4}\lambda\,\frac{1-\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}{r}\right].$$

2° *Après la fin de la combustion.*

$$P = P'\,\frac{\theta\gamma}{s}$$

avec

$$s = 1 - r\left(1+\frac{3}{4}\lambda\right).$$

164. **Pression maximum.**

Les formules du n° 111 donneront :

$$Q_0^{\zeta} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\,\zeta\left[1+\frac{3}{8}\,\frac{3\gamma+1}{\gamma}\,\lambda\zeta\right]$$

$$P_0^{\zeta} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}\left[1-\frac{3}{4\gamma}\,\lambda\zeta\right]$$

$$R_0^{\zeta} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\zeta\left[1+\frac{3(\gamma+1)}{8\gamma}\,\lambda\zeta\right].$$

On aura, par suite, pour les formules de la pression maximum d'une poudre à combustion quasi-constante :

$$\zeta = \frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\frac{1}{r}\left[1-\frac{3(\gamma-1)(3\gamma+1)}{2^4\gamma^2}\,\frac{\lambda}{r}\right]$$

$$\frac{\chi-\varpi'}{c'-\varpi'} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}\left[1-\frac{3(\gamma-1)}{8\gamma^2}\,\frac{\lambda}{r}\right]$$

$$P_M = P'\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\frac{1}{r}\left[1-\frac{3}{8}\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{\lambda}{r}\right].$$

CHAPITRE VIII

LES EXPÉRIENCES DE TIR

§ 1. — Les caractéristiques du canon

165. **Expériences de tir et expériences de Balistique.** — On fait du mot *expérience* un emploi le plus souvent injustifié en donnant ce nom, dans les champs de tir, à des tirs de détermination de charges ou à des essais courants de projectiles ou de poudres. Une véritable expérience, pour mériter ce nom au point de vue de la science, exige d'autres conditions ; elle suppose la recherche poussée jusqu'aux limites accessibles, systématiquement menée, dégageant une à une les influences des diverses variables et se proposant, pour asseoir ou vérifier la théorie, l'étude de lois continues et non la détermination de quelques points isolés des courbes représentatives des phénomènes. Dans ce chapitre, nous parlerons des tirs courants dans les polygones, de l'étude des canons existants et des poudres en service, pour lesquelles il s'agira d'appliquer les formules de la Pyrodynamique et non de les découvrir.

166. **Coefficients et caractéristiques.** — Une science est sortie du domaine de l'empirisme lorsqu'elle a remplacé tous les *coefficients* de ses formules par des *caractéristiques*. Voici ce qu'il faut entendre par cette distinction :

Les *coefficients* sont des nombres qui se déterminent par

le résultat même qu'on devrait se proposer de trouver par la théorie. Si on suppose, a priori, pour la facilité des calculs par exemple, que la vitesse initiale est proportionnelle à la puissance n de la charge $V_0 = K\varpi^n$, l'exposant n et le nombre K seront deux *coefficients* que nous déterminerons par une série de tirs aussi variés que possible, depuis $\varpi = 0$ jusqu'à une valeur de ϖ maximum et on prendra les valeurs moyennes des n et K pour tous les tirs considérés entre ces limites.

Toutes les formules empiriques auront besoin de ce recours constant à l'expérience ; leur valeur pratique — toute relative et momentanée d'ailleurs — est proportionnelle au nombre de coups de canon d'où on a déduit les coefficients et la région d'application de ces formules sera, exclusivement, bornée aux tirs qu'on a directement vérifiés.

Mais, supposons que la théorie soit assez avancée pour dire : la formule $V_0 = K\varpi^n$ est la formule rigoureusement nécessaire de la vitesse initiale, qu'on déduit, par les méthodes de l'analyse, des lois élémentaires physiques du phénomène et des principes de la mécanique rationnelle. Alors les nombres K et n deviennent des *caractéristiques*, c'est-à-dire des constantes qu'il suffira de deux tirs arbitraires pour déterminer, avec la certitude que tous les autres tirs possibles rentreront dans la formule ainsi *numériquement* complétée.

La Pyrodynamique est, pensons nous, à peu près parvenue aujourd'hui à ce degré de perfection.

On connait : 1° les *caractéristiques* de la poudre f, τ, A, β, qu'on sait déterminer par des expériences précises et dans une bombe, c'est-à-dire indépendamment de tout tir dans le canon ;

2° les *constantes du chargement*, c'est-à-dire ϖ et p ;
3° les *constantes du canon*, c'est-à-dire c', C, σ.

Les formules de la Balistique Intérieure ne contiennent que ces nombres. Si, à leur connaissance, on ajoute celle des *caractéristiques du canon*, on devra pouvoir, a priori, résoudre tous les problèmes qu'on peut se poser sur l'artillerie existante et sur l'artillerie future, sur les poudres en usage et sur celles que l'on peut leur substituer.

Les caractéristiques du canon sont au nombre de trois qu'on désignera sous les notations z_0, i et j.

167. **La caractéristique z_0 du forcement.** — La pression P_0 de forcement, qui se développe dans la chambre à poudre avant que le projectile ne se mette en marche dépend de trois éléments, le *tracé de la chambre à projectile dans le canon*, la *forme et la saillie des ceintures du projectile*, l'*usure du canon.*

On pourra, sans doute, trouver, expérimentalement, une loi empirique de la forme $P_0 = ka^n$ qui relierait la pression P_0 au calibre a pour des bouches à feu semblables tirant des projectiles dont les ceintures seraient semblables ; il paraît bien que l'exposant n ne doit pas être éloigné de l'unité, si on cherche à en établir, a priori, la valeur par quelques raisonnements simples sur la résistance du métal de la ceinture.

Mais, cette similitude des canons et des projectiles ne se rencontre pas dans l'artillerie en service ; les modèles des canons de la Marine sont d'une variété qui défie presque la nomenclature et la *forme*, le *nombre*, le *profil des ceintures* des projectiles contribuent à rendre presque indépendant chaque canon des autres au point de vue de la valeur de la pression de forcement P_0. A ces causes origi–

nelles, on doit ajouter encore l'*usure* du canon qui, progressivement, fait varier la pression de forcement et vient encore troubler les résultats des tirs.

Toutes ces différences, qui individualisent chaque bouche à feu, ont leur répercussion sur les formules de la Balistique, et sur la *caractéristique* spéciale qui en tient compte.

Pour déterminer la pression de forcement P_0, on peut employer trois méthodes :

1° *Statiquement.* Si on dispose d'une presse hydraulique assez puissante, on mesurera l'effort nécessaire pour faire pénétrer le projectile dans l'âme. Ce procédé n'est guère applicable qu'aux petites bouches à feu.

2° *Par le tir.* Encadrer par le tir à deux charges très faibles ϖ_1 et ϖ_2 la charge ϖ_0 qui chasse le projectile de l'âme. On sait que la vitesse initiale n'est pas nulle sitôt que la charge ϖ_0 est atteinte. Mais, ce procédé d'encadrement est très peu précis ; un très faible avancement du projectile, sans qu'il soit sorti du cône de raccordement, suffit pour modifier, du tout au tout, les conditions du phénomène et la pression enregistrée.

Il faut mieux tirer à des charges assez faibles, mais cependant franchement supérieures à ϖ_0 ; puis tracer par quelques points la courbe (P_M, ϖ) dont on cherchera l'intersection avec la courbe $P' = f\dfrac{\Delta}{1-\Delta}$ des pressions en vase clos. Cette intersection donne la valeur de la pression de forcement P_0.

3° *Par le tracé des crushers.* Utiliser le théorème du n° 124 qui démontre que, dans la courbe (P, t), obtenue expérimentalement soit par le *crusher enregistreur Vieille*, soit par le *manomètre à ressort*, le point d'inflexion

(pseudo-point d'inflexion) correspond à la valeur de la pression de forcement P_0.

Cette valeur P_0 étant connue, et caractérisant l'état actuel du canon relativement au projectile, on calculera la *caractéristique* z_0 par la formule :

$$P_0 = f \frac{\Delta}{1 - \Delta} z_0.$$

Si le canon s'use, P_0 tend vers zéro, valeur qu'il aurait pour un projectile dont les ceintures auraient été préalablement ajustées sur les rayures. On aura donc le moyen de suivre l'histoire du canon depuis son départ de la fonderie jusqu'à sa réforme, pour usure, en faisant varier z_0 depuis sa valeur initiale jusqu'à zéro.

168. **La caractéristique *i* du canon.** — Nous avons montré, dans l'étude des termes secondaires, que la masse fictive $\mu = \frac{p + 2\varpi}{g}$ du projectile devait être multipliée par un facteur tenant compte de la force *vive de rotation du projectile*, du *frottement des rayures* et de l'*inertie de la masse qui participe au recul*.

Mais, dans ce nombre i, on peut faire entrer également la valeur moyenne de nombre d'autres termes secondaires, tels que les pertes de force vive dues au chambrage, les erreurs sur l'exposant γ de détente expérimentale, l'échauffement du canon, etc.

Pour déterminer le nombre i, tel que $i\mu$ sera la masse fictive du projectile, il suffira de tirer dans des conditions telles que la *vivacité* A n'intervienne que très peu dans les formules, c'est-à-dire de faire une expérience de tir avec une poudre très vive.

La valeur théorique de i, qui résulte des trois causes énumérés au premier alinéa serait voisine de 1,05 pour la plupart des canons.

169. **La caractéristique** j **de la vivacité.** — Que la *vivacité* A, déterminée dans la bombe, soit exactement celle qui s'applique à la combustion de la poudre dans l'âme du canon, on conçoit aisément l'impossibilité d'une pareille concordance, en se reportant à la théorie de la Pyrostatique où nous avons défini la *forme* et la *vivacité* d'une poudre (18). La disposition de la charge dans la chambre à poudre en fagots, longs ou courts, uniques ou multiples, l'amorçage, le chambrage, le mouvement même du projectile, l'étalement de la poudre le long de l'âme à la suite du projectile sont des conditions qui différencient nettement le phénomène physique tel qu'il se passe dans la bouche à feu de celui qui se passe en vase clos.

Les mêmes raisons de variation de la *vivacité* A tendent également à faire varier la *fonction de forme*, c'est-à-dire l'exposant β. Mais ce nombre étant engagé dans les formules d'une manière qui ne permet pas d'en saisir aisément les variations, on est porté à essayer de faire porter toutes les modifications sur la vivacité A.

Il est bien évident que dans le nombre qui devra multiplier la *vivacité* A de la bombe, entrent deux facteurs : l'un commun à toutes les poudres et à tous les canons qui représente, en gros, la différence entre l'expérience faite dans la bombe et celle faite dans le canon, et l'autre spéciale à chaque bouche à feu, dépendant de ses dispositions intérieures propres et du mode de chargement employé.

On est donc conduit à concevoir une certaine *caractéristique j de la vivacité*.

Pour la déterminer par le tir, on tirera une *poudre très lente* dans le canon à l'étude. Comme la caractéristique i a été déterminée par l'expérience précédente, la vivacité jA, qui prend alors toute son importance, pourra être calculée.

170. **Résumé.** — La détermination expérimentale des trois *caractéristiques* z_0, i et j du canon, permet de remplacer, pratiquement, la théorie inconnue ou incomplète des termes secondaires de la Pyrodynamique et de rattacher dans chaque cas, à leur cause, les différences observées dans les tirs.

Analytiquement, chacune des caractéristiques peut être considérée comme développable en série par rapport aux différents éléments de changement ; par exemple, on aura

$$i = i_0 + \left(\frac{\partial i}{\partial \varpi}\right)_0 d\varpi + \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_0 dp + \dots$$

et c'est la valeur i_0 qui constitue la *caractéristique* moyenne, les autres termes constituant des corrections que le tir devra déterminer.

Remarque. — On devra, en outre, observer que pour la comparaison des pressions maxima calculées et des pressions maxima enregistrées par les crushers de culasse, il y a lieu de tenir compte de l'influence du chambrage ainsi qu'il a été exposé précédemment (54).

§ 2. — Les formules différentielles

171. **Utilité des formules différentielles.** — Les tirs courants, soit dans leur exécution au polygone, soit pour leur discussion, exigent, très souvent, qu'on connaisse les variations des vitesses initiales et des pressions maxima qui correspondent à de petites variations dans les conditions du chargement.

Il faut éviter d'avoir à refaire les calculs assez longs qui conduisent à la détermination de V_0 et de P_M et on a besoin de posséder des formules, aussi simples que possible, permettant de calculer les variations ∂V_0 et ∂P_M en fonction des petites variations telles que ∂f, ∂A, $\partial \varpi$, ∂p, etc., etc.

Ce sont les *formules différentielles* qui atteignent ce but; leur simplicité résultera de la séparation, par un principe général, de l'effet de variations qu'on considère comme ayant une influence isolée.

On pourrait, en partant des formules générales de la Balistique Intérieure (110 et 111) qui donnent V_0 et P_M, obtenir ∂V_0 et ∂P_M par des calculs relativement simples et mettre les résultats sous forme assez pratique pour les applications, en calculant les tables nécessaires.

Nous nous proposons ici seulement de faire connaître des formules différentielles très simples et, le plus souvent, suffisantes pour les applications qui résultent de la considération d'hypothèses particulièrement favorables à la simplicité des calculs, c'est-à-dire du cas des poudres à combustion constante (Chap. VII).

172. **Formules différentielles de la pression maximum.** — Nous prendrons la formule de la pression maximum sous la forme simple qui a été établie au n° 115

$$P_M = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\frac{P'}{\mathbf{r}}.$$

1° On formera $\partial P'$ et $\partial \mathbf{r}$.

On a

$$P' = f\frac{\varpi}{c' - \varpi},$$

d'où

$$\frac{\partial P'}{P'} = \frac{\partial f}{f} + \frac{\partial \varpi}{\varpi} - \frac{\partial c' - \partial \varpi}{c' - \varpi}.$$

D'autre part

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\mu}{10 f\varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2$$

d'où

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\mathbf{r}} = -\frac{\partial f}{f} - \frac{\partial \varpi}{\varpi} - \frac{2\,\partial A}{A} - \frac{\partial \mu}{\mu}.$$

2° On écrira alors

$$\frac{\partial P_M}{P_M} = \frac{\partial P'}{P'} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\mathbf{r}}.$$

On aura donc, en développant $\partial P'$ et $\partial \mathbf{r}$, la formule

$$\frac{\partial P_M}{P_M} = \frac{\partial p}{p + 2\varpi} + \frac{2\,\partial A}{A} + \frac{2\,\partial f}{f} - \frac{\partial c'}{c' - \varpi'} + \frac{2 - \Delta}{1 - \Delta}\,\frac{\partial \varpi}{\varpi}$$

C'est la formule différentielle cherchée.

Remarque. — Dans le cas général d'une fonction $\varphi(z)$ quelconque, on peut remarquer, d'après les tables des fonc-

tions $\mathbf{Q}^{\zeta}_{z_0}$ et $\mathbf{R}^{\zeta}_{z_0}$ [1] que, dans les limites ordinaires de la pratique, on peut prendre $\mathbf{R}^{\zeta}_{z_0} = e + b\mathbf{Q}^{\zeta}_{z_0}$.

On aura alors, comme formule différentielle

$$\frac{\partial P_M}{P_M - eP'} = \frac{\partial p}{p + \mathfrak{s}\varpi} + \frac{2\,\partial A}{A} + \frac{2\,\partial f}{f} - \frac{\partial c'}{c' - \varpi'} + \frac{2 - \Delta}{1 - \Delta}\frac{\partial \varpi}{\varpi}$$

[On prendra $e = \frac{1}{12}$, en général].

173. **Formules différentielles de la vitesse initiale.** — On prendra les formules des poudres à combustion constante (143).

Dans les calculs s'introduira la dérivée de la fonction de détente θ^n, que nous calculerons d'abord.

On a

$$\theta^n = \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^n$$

d'où

$$\frac{\partial \theta^n}{\theta^n} = n\,\frac{\partial c' - \partial \varpi'}{c' - \varpi'} - n\,\frac{\partial c - \partial \varpi'}{c - \varpi'}.$$

Donc

$$\partial \theta^n = n\theta^n \frac{\partial c'}{c' - \varpi'} - n\theta^n \frac{\partial c}{c - \varpi'} + n\theta^n(\theta - 1)\frac{\partial \varpi}{c' - \varpi'}.$$

Premier cas. La poudre n'est pas complètement brûlée. — La formule qui donne la vitesse initiale est

$$\frac{\mathbf{r}A\mu}{\sigma} V_0 = 1 - \theta^{\frac{\gamma - 1}{2}}$$

d'où on tire

$$\frac{\partial V_0}{V_0} + \frac{\partial \mu}{\mu} + \frac{\partial A}{A} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\mathbf{r}} = - \frac{\partial \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}{1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}$$

[1] Ch. 4.

Remplaçant $\frac{\partial \mathbf{r}}{\mathbf{r}}$ et $\partial\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}$ par leurs valeurs, il viendra la formule suivante, qui résout le problème :

$$\frac{\partial V_0}{V_0} = \frac{\partial f}{f} + \frac{\partial A}{A} + \frac{\partial \varpi}{\varpi}$$

$$+ \frac{\gamma - 1}{2} \frac{(1-\theta)\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}{1-\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}} \frac{\partial \varpi}{c' - \varpi'}$$

$$+ \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}{1-\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}} \frac{\partial C}{C - \varpi'}$$

$$- \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}{1-\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}} \frac{\partial c'}{c' - \varpi'}$$

Deuxième Cas. La poudre est complètement brûlée. — La formule est dans ce cas :

$$V_0^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f\varpi}{\mu} \left[1 - \frac{\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}}\right]$$

Avec $\mathbf{s} = 1 - \mathbf{r}$ on différentiera donc, après avoir écrit

$$\frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f\varpi} V_0^2 \mathbf{s} = \mathbf{s} - \theta^{\gamma-1}$$

par la formule

$$\frac{2\,\partial V_0}{V_0} + \frac{\partial \mu}{\mu} - \frac{\partial f}{f} - \frac{\partial \varpi}{\varpi} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{s} - \partial\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s} - \theta^{\gamma-1}}.$$

Remplarant ∂s par $-\partial r$ développé et $\partial \theta^{\gamma-1}$ par sa valeur, il viendra, toutes réductions faites :

$$\begin{aligned}
\frac{2\,\partial V_0}{V_0} = & \left(\frac{1-s}{s}\frac{\theta^{\gamma-1}}{s-\theta^{\gamma-1}} - 1\right)\frac{\partial \mu}{\mu} \\
& + \left(\frac{1-s}{s}\frac{\theta^{\gamma-1}}{s-\theta^{\gamma-1}} + 1\right) + \frac{\partial f}{f} \\
& + 2\,\frac{1-s}{s}\frac{\theta^{\gamma-1}}{s-\theta^{\gamma-1}}\frac{\partial A}{A} \\
& + \left(\frac{1-s}{s}\frac{\theta^{\gamma-1}}{s-\theta^{\gamma-1}} + 1\right)\frac{\partial \varpi}{\varpi} \\
& + (\gamma-1)\frac{(1-\theta)\theta^{\gamma-1}}{s-\theta^{\gamma-1}}\frac{\partial \varpi}{c'-\varpi'} \\
& - (\gamma-1)\frac{\theta^{\gamma-1}}{s-\theta^{\gamma-1}}\frac{\partial c'}{c'-\varpi'} \\
& + (\gamma-1)\frac{\theta^{\gamma-1}}{s-\theta^{\gamma-1}}\frac{\partial C}{C-\varpi'}.
\end{aligned}$$

Il suffira d'avoir calculé des tables de chacune des fonctions de θ et de s ou d'en avoir dressé des abaques pour pouvoir résoudre, avec une extrême simplicité, tous les problèmes différentiels qui pourront se présenter dans la pratique.

§ 3. — Recette des poudres par le tir

174. **Importance des épreuves de recette.** — Il importe, avant de mettre un lot de poudre en service, qu'on ait vérifié si ses propriétés balistiques sont suffisamment voisines de celles des lots antérieurement employés

pour le tir de combat. A cet effet, on lui fait subir des épreuves de tir qui doivent permettre d'établir le classement de ce lot, relativement à un lot considéré comme *normal.*

Du choix judicieux des épreuves de recette, dépend la sécurité d'emploi balistique de la poudre[1] et on conçoit l'importance d'une théorie générale capable de guider dans cette question fort discutée[2].

On doit remarquer, en effet, que c'est en agissant sur les conditions de recette et en les faisant de plus en plus sévères, sans cesser d'être rationnelles, que le service consommateur peut stimuler l'industrie des poudres et imposer, même, au service fabricant un progrès continu. L'Artillerie Navale offre des exemples nombreux, dans l'histoire des métaux à canon, des cuirasses et des projectiles de rupture, de cette collaboration intime des usines métallurgiques et de l'artillerie; les perfectionnements progressifs réalisés se traduisent, techniquement, par la sévérité croissante des conditions de recette auxquelles peuvent satisfaire les fournisseurs.

Nous allons examiner, pour les poudres, sur quels principes on peut espérer baser une méthode rationnelle de recette.

175. **La recette dans les conditions d'emploi.** — Actuellement, la méthode la plus ordinairement employée est de recevoir les poudres par le tir dans un des canons

[1] Il ne peut être question ici des autres épreuves de la poudre, par exemple, de celles de stabilité, qui rentrent dans un tout autre domaine, l'étude chimique de la poudre.

[2] Crémieux.

où elle doit être utilisée en service et d'effectuer le tir de recette dans les conditions mêmes du combat.

Ainsi, si la Marine emploie 10 sortes de poudres, les éprouvettes seront au nombre de 10, allant du calibre de 47 millimètres au calibre de 305.

On mesurera la vitesse initiale V_0 et la pression maximum P_M et si ces deux nombres ne s'écartent pas trop d'un nombre fixé d'avance, le lot sera admis en recette.

Pour beaucoup d'artilleurs[1], le tir dans ces *conditions d'emploi* réalise l'épreuve-type dont le principe même paraît au-dessus de toute discussion (en admettant cependant qu'une poudre n'est tirée en service que dans une seule bouche à feu).

Si cette méthode peut paraître, en effet, défendable quand on ignore tout des théories et des propriétés balistiques des poudres et qu'on s'impose la règle de faire appel seulement à l'empirisme vulgaire, elle ne résiste pas à un examen sérieux de la question ; il est facile de voir, au contraire, qu'elle se présente comme une entrave permanente à tout progrès continu.

Cette méthode est en effet :

Onéreuse. Car un coup de canon d'un canon de gros calibre coûte très cher et on est conduit à limiter le nombre de coups de recette à un extrême minimum.

Insuffisante. Car, du fait que deux lots de poudres ont satisfait aux épreuves, on n'est ni en droit de conclure à l'identité des propriétés des deux lots ni capable de chiffrer leur différence, de sorte que si la poudre est employée dans un canon autre que le canon de recette, on n'a aucun renseignement sur la manière dont ils se comporteront ; on

[1] Crémieux. p. 159.

ne peut rien affirmer non plus, concernant la variation avec le temps, des propriétés balistiques de lots ainsi reçus, mais imparfaitement connus.

Arbitraire. — Car les épreuves se font dans des canons divers avec des conditions de chargement variées, de sorte qu'aucun lien ne réunit les diverses poudres et ne guide dans le choix de leurs épreuves.

Inféconde. — Parce qu'au lieu d'une étude d'ensemble embrassant toutes les poudres, chacune reste isolée, est étudiée en elle-même, par des épreuves insuffisantes et sans relation entre elles et avec les théories des poudres. Les progrès effectués sur une poudre déterminée par une poudrerie particulière ne peuvent être reportés ni imposés à une autre poudre, faute d'une correspondance correcte de leurs propriétés balistiques.

176. **Principe logique des épreuves.** — 1° La théorie de la Balistique Intérieure que nous avons exposée, conduit à considérer comme *caractéristiques* d'une poudre un certain nombre de constantes, à savoir :

f, la *force de la poudre*,

η, le *covolume*,

α, *l'exposant de pression*,

β, la *forme*, c'est-à-dire l'exposant de la *fonction de forme* $\varphi(z) = (1 - z)^\beta$ pour les poudres *dégressives*.

A la *vivacité* de la poudre.

De ces six nombres, on admet comme constants η et α parce qu'ils correspondent à des propriétés physiques des gaz de la poudre sur lesquels on ne paraît pas pouvoir agir par les procédés de fabrication, si la matière de la poudre reste la même.

Les trois autres f, β et A sont les *caractéristiques* de la

nature (genre, espèce et variété de la poudre) et de la perfection de la fabrication, si on considère leurs variations ∂f, $\frac{\partial A}{A}$ et $\partial\beta$ d'un lot à l'autre.

D'une manière générale on peut dire :

a) f, la *force de la poudre* est une quantité qui varie un peu avec l'épaisseur de la poudre ; ses variations (c'est-à-dire ∂f) dépendent principalement des proportions du mélange de coton soluble ou insoluble, du séchage, de l'évaporation, plus ou moins complète du dissolvant, de l'humidité résiduelle etc... ; en tous cas, elles sont très nettement liées aux procédés de fabrication et à l'état physique sous lequel la poudre est livrée.

β, la *forme* qui caractérise *l'espèce* de la poudre dépend des irrégularités de la pâte, du mode accidentel de combustion, des amorces de trous, du gondolement des brins, des traînées de matière, des irrégularités de densité, du degré d'homogénéité du mélange, du nombre de sous-lots employés. En un mot, cet exposant définit le degré *d'imperfection des poudres*, si bien que la valeur de β qui, pour une poudre plate théoriquement parfaite, devrait être voisine de zéro, atteint, en pratique, la valeur de 0,2 pour les poudres actuellement fabriquées en France avec, souvent, des variations de 0,1 d'un lot à l'autre.

A, la *vivacité*, pour une poudre parfaite, caractérise la *variété* de poudre ; elle dépend de l'épaisseur moyenne et de la densité et, par suite, des opérations mécaniques d'étirage, de striage, de laminage etc..., que l'on peut faire subir à la poudre ; le nombre $\frac{\partial A}{A}$ exprime les variations accidentelles ou systématiques de ces opérations.

2° Ceci posé, le principe d'une méthode logique de

recette des poudres consistera à substituer à la connaissance des résultats bruts d'un tir (V_0 et P_M) la détermination des nombres f, β et A qui ont une signification physique, un rôle connu dans le phénomène de la combustion des poudres et qui suffisent pour calculer les vitesses et pressions dans toutes les bouches à feu.

Par cette méthode, on essayera de substituer à l'enregistrement brutal des effets globaux obtenus dans un tir arbitraire, l'analyse détaillée de leurs causes, dont la connaissance permettra de remonter jusqu'à l'origine physique des écarts constatés, c'est-à-dire jusqu'à la fabrication même.

177. **Tirs dans la bombe.** — *Une première épreuve de recette des poudres sera effectuée en vase clos.* On sait, en effet, que cette épreuve suffira pour déterminer les trois caractéristiques f, β et A, par la détermination des trois nombres

$$P', \left(\frac{dP}{dt}\right)_i \text{ et } P_i$$

Des conditions de recette seront imposées pour limiter les variations df, $\frac{\partial A}{A}$ et $\partial\beta$ de ces trois quantités relativement à leur valeur normale, et relativement à leur écart entre elles dans les coups tirés.

L'accroissement de f, la *diminution* de β, la *constance* de A pourront être exigées progressivement comme caractérisant une fabrication qui irait en s'améliorant.

Le principe du lien nécessaire des diverses poudres employées entre elles, exigera que toutes les poudres soient tirées dans les mêmes conditions et, en particulier

dans la même bombe, avec le même amorçage, avec la même densité de chargement.

178. **Nécessité d'une épreuve dans un canon.** — Mais, il ne peut être question, à l'heure actuelle tout au moins, dans l'état encore imparfait de la fabrication, de faire état seulement des résultats obtenus en vase clos : trop d'influences encore ignorées, trop d'élément divers influent sur les propriétés des poudres pour qu'on puisse, aujourd'hui, conclure, de l'identité de deux lots dans la bombe, à leur identité dans le tir des bouches à feu.

C'est là, sans doute, un état idéal qu'on peut espérer atteindre, mais qu'on ne peut supposer *à priori*.

Il est donc nécessaire de faire une épreuve de tir dans une bouche à feu, de manière à mesurer des quantités de même espèce que celles qu'on utilise dans l'emploi de l'arme, c'est-à-dire la *vitesse initiale* et la *pression maximum*.

On ne saurait d'ailleurs mieux comparer les épreuves de recette des poudres qu'aux recettes des plaques de blindage ou des projectiles de rupture.

Pour la fabrication des plaques, le fournisseur fera, dans ses ateliers, des essais d'éprouvettes à la traction, au choc, à la dureté, à la flexion, des analyses chimiques etc... L'expérience lui aura démontré, en effet, que pour la réussite ultérieure des épreuves de tir, ces essais préliminaires étaient nécessaires. Le client pourra même exiger que certaines conditions de recette préalables soient satisfaites et faire exécuter de tels essais par son service de contrôle.

De même pour les poudres, les épreuves dans la bombe permettront au poudrier de régler sa fabrication et, s'il

sait, par la théorie ou l'expérience, relier les résultats en vase clos à ceux du tir d'épreuve, il aura le moyen de présenter des lots en recette avec un maximum de probabilités pour leur réception.

Mais, aussi bien pour les plaques que pour les poudres, l'épreuve de recette définitive sera l'épreuve de tir dans une bouche à feu, c'est-à-dire une épreuve de même espèce que l'emploi.

Ne subiront cette épreuve de recette dans la bouche à feu, que les lots de poudres qui auront satisfait aux épreuves préalables dans la bombe.

179. **Principes du tir dans le canon de recette. —** Les principes qui peuvent guider dans le choix des conditions de recette par le tir nous paraissent être au nombre de quatre.

Première règle. — Un seul tir, où on mesurera la vitesse initiale V_0 *et la pression* P_M *est suffisant.*

Comme il existe, ainsi qu'on l'a dit, trois caractéristiques, f, β et A, dont les variations df, $d\beta$ et $\frac{dA}{A}$ sont susceptibles de faire varier les propriétés balistiques des poudres, il faudrait deux tirs, en toute rigueur, avec mesure des vitesses et des pressions. Mais nous pouvons admettre que l'épreuve éliminatoire de la bombe, tient lieu d'un tir; par suite, un seul tir dans le canon de recette sera nécessaire et suffisant.

Deuxième règle. — Le canon de recette sera unique pour toutes les poudres.

C'est en effet le seul moyen :

1° d'avoir une échelle continue des poudres;

2° d'avoir des épreuves rigoureusement comparables;

3° de pouvoir faire profiter des progrès de la fabrication réalisés par une poudrerie sur une poudre particulière, toutes les autres poudres de toutes les autres poudreries.

Troisième règle. — L'échelle des poudres sera établie en ne faisant varier, d'une poudre à l'autre, qu'une seule variable.

On aura déjà une échelle des poudres par le tir dans la bombe qui sera fait, comme on l'a dit, à la même charge pour toutes les poudres, et l'échelle sera celle des *vivacités* A.

Dans le canon, on aura soin de ne faire varier qu'un qu'un seul élément à la fois. Il sera, en effet, impossible, en général, de tirer toutes les poudres à la même charge, les pressions des plus vives étant susceptibles de compromettre la solidité de la bouche à feu.

On s'imposera, par exemple, une loi de variation des *densités de chargement*, en progression arithmétique de l'une à l'autre poudre. Cette loi suffira pour établir une échelle logique et continue des poudres, dont les *vivacités* A sont déjà, par hypothèse, sur une échelle bien continue.

Quatrième règle. — L'éprouvette devra être plus sensible que le canon d'emploi.

On voit, si on se reporte aux formules différentielles des numéros 173 et 174 :

1° Que la sensibilité des pressions maxima est mesurée par :

$$\frac{\partial P_M}{P_M - eP'} = 2\,\frac{\partial A}{A};$$

elle ne dépend donc pas de la bouche à feu.

2° Que la sensibilité des vitesses initiales est mesurée par :

$$\frac{\partial V_0}{V_0} = \frac{\partial A}{A}$$

avant la fin de la combustion.
et par :

$$\frac{\partial V_0}{V_0} = \frac{\partial A}{A} \frac{1 - s}{s} \frac{\theta^{\gamma - 1}}{1 - \theta^{\gamma - 1}}$$

après la fin de la combustion.

Or, le facteur qui multiplie $\frac{\partial A}{A}$ tend vers zéro à mesure que la bouche à feu s'allonge, et que la combustion totale est faite plus tôt. Ceci s'explique aisément, à priori, car les irrégularités *de forme* $\partial\beta$ ou de *vivacité* ∂A disparaitraient pour une poudre totalement convertie en gaz dès l'origine du mouvement.

Ainsi donc, la sensibilité des vitesses relativement aux variations accidentelles des poudres, pour une poudre non complètement brûlée dans un canon, est bien plus grande que si elle est complètement brûlée.

Ces formules expliquent les faits expérimentaux couramment constatés que, quand on passe d'un calibre à un calibre plus petit, pour une même différence ∂A entre deux lots de poudre :

a) les différences des pressions maxima entre les deux lots sont sensiblement les mêmes dans les deux canons.

b) les différences des vitesses initiales s'accentuent considérablement quand on passe du fort au petit calibre ; car, dans le dernier, la poudre est moins complètement brûlée que dans l'autre.

On prendra donc, comme éprouvette unique, un canon

dans lequel la poudre la plus vive employée ne brûlera pas complètement. Les autres poudres, plus lentes, ne brûlant pas non plus complètement, les formules différentielles de la vitesse initiale montrent que la *sensibilité du canon-éprouvette sera la même pour toutes les poudres.*

180. **Choix du canon éprouvette.** — On peut alors fixer facilement les caractéristiques du canon-éprouvette qui pourra être : de calibre inférieur au canon qui emploie la poudre la plus vive; de très faible longueur d'âme; tirant un projectile très léger.

Toutes ces conditions peuvent d'ailleurs être remplacées par la suivante : *la poudre ne brûlera pas entièrement dans le canon choisi.*

Il n'y a aucun intérêt à ce que la bouche à feu soit d'un modèle analogue à ceux qui sont en service. Au contraire, la variation incessante des canons de Marine et, en particulier, de leurs dispositions intérieures, rend désirable que l'éprouvette soit affranchie de ces variations et que sa forme et ses dimensions restent immuables dans la suite des temps.

La bouche à feu sera aussi simple que possible, sans chambrage afin de diminuer l'usure, avec une cartouche organisée soigneusement dans tous ses détails, avec une charge et un amorçage toujours identiques à eux-mêmes, un sertissage bien réglé sur la douille, etc.

L'emploi d'un canon ou plutôt d'un mortier à âme lisse, tirant un boulet sphérique, paraît particulièrement convenable, comme éprouvette unique, pour la recette de toutes les poudres de guerre.

CHAPITRE IX

CAS D'UN EXPOSANT QUELCONQUE DE LA PRESSION

§ 1. — FONCTIONS D'HOMOGÉNÉITÉ DE MM. GOSSOT ET LIOUVILLE

181. **Cas d'un exposant α de la pression.**— Bien que, ainsi qu'on l'a vu (48), l'expérience ait montré que, avec les poudres actuelles, l'exposant α de la combustion en vase clos

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z)\,P^{\alpha}$$

devait être pris égal à l'unité, il ne sera pas inutile, ici, d'examiner le cas où cet exposant a une valeur quelconque.

D'une part, en effet, il peut se trouver des poudres nouvelles pour lesquelles la loi de combustion soit changée ; d'autre part, les travaux de M. Sarrau et de ses disciples admettaient, pour l'exposant α, une valeur différente de l'unité, soit $\alpha = \frac{1}{2}$ comme M. Sarrau lui-même, soit $\alpha = \frac{3}{4}$ comme le colonel Jacob, soit $\alpha = \frac{2}{3}$ comme M. Vieille, et le général Gossot et M. l'ingénieur Liouville

Des travaux mathématiques considérables ont pris comme base ces diverses hypothèses et les formules qui en résultent ont été employées, à diverses reprises, par les Commissions d'Expériences pour la représentation des phénomènes de la Balistique Intérieure.

Nous ferons tout d'abord connaître, dans le présent paragraphe, les *fonctions d'homogénéité* de MM. Gossot et Liouville

en généralisant un peu la démonstration des auteurs[1], pour une fonction $\varphi(z)$ quelconque.

182. **Les théorèmes de MM. Gossot-Liouville.** — 1° Des trois équations différentielles de la Balistique Intérieure où seule la deuxième diffère des équations des nos 85 et 88

$$(1) \qquad \mu \frac{dv}{dt} = \sigma P$$

$$(2) \qquad \frac{dz}{dt} = A\varphi(z)P^{\alpha}$$

$$(3) \qquad (c - \varpi') \frac{vdv}{dc} + \frac{\gamma - 1}{2} v^2 = \frac{10 f\varpi}{\mu} z$$

on tirera, en éliminant P entre (1) et (2), et remarquant que $\sigma vdt = 10\, dc$, l'équation suivante

$$(4) \qquad \frac{dz}{dc} = \varphi(z)\, Hv^{\alpha-1} \left(\frac{dv}{dc}\right)^{\alpha}$$

avec

$$H = \frac{A\mu^{\alpha}}{10^{\alpha-1}\,\sigma}$$

2° Nous poserons, en vue d'un changement de variables :

$$c - \varpi' = H^{\lambda} x$$

et nous déterminerons l'exposant λ de manière que H disparaisse de l'équation (4). A cet effet, il suffit de prendre

$$\lambda = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Avec la nouvelle variable x, l'équation (4) devient .

$$(5) \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(z)\, v^{\alpha-1} \left(\frac{dv}{dx}\right)^{\alpha}$$

D'autre part, l'équation (3) devient :

$$(6) \qquad x \frac{vdv}{dx} + \frac{\gamma - 1}{2} v^2 = \frac{10 f\varpi}{\mu} z.$$

[1] Gossot et Liouville. 2.

3° Cherchons maintenant à faire disparaître des équations (5) et (6) le produit $\frac{10\, f\varpi}{\mu}$.

Ce produit disparaîtra de l'équation (6) si on pose ;

$$v^2 = \frac{10\, f\varpi}{\mu}\, w$$

avec la nouvelle variable w.

Posons, en outre, $x = x' \left(\frac{10\, f\varpi}{\mu}\right)^y$ avec l'exposant y indéterminé et remplaçons, dans (5), v et x par leurs nouvelles valeurs ; on aura :

$$\frac{dz}{\left(\frac{10\, f\varpi}{\mu}\right)^y dx'} = \frac{\varphi(z)}{2^\alpha}\, \frac{w^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{10\, f\varpi}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}}\, \frac{\left(\frac{10\, f\varpi}{\mu}\right)^\alpha}{\left(\frac{10\, f\varpi}{\mu}\right)^{\alpha y}} \left(\frac{dw}{dx'}\right)^\alpha$$

et, pour faire disparaître le facteur $\frac{10\, f\varpi}{\mu}$, on prendra :

$$\alpha + y = \frac{1}{2} + \alpha y$$

d'où

$$y = \frac{2\alpha - 1}{2(\alpha - 1)}.$$

4° Ainsi donc, en posant :

$$w = \frac{\mu v^2}{10\, f\varpi}$$

$$x' = \left(\frac{\mu}{10\, f\varpi}\right)^{\frac{2\alpha - 1}{2(\alpha - 1)}} \left(\frac{A\mu^\alpha}{10^{\alpha - 1}\sigma}\right)^{-\frac{1}{\alpha - 1}} (c - \varpi')$$

on réduira les formules de la Balistique Intérieure à deux qui sont les suivantes :

$$\varkappa' \frac{dw}{d\varkappa'} + (\gamma - 1) w = 2z$$

$$2^{\alpha} w^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{d\varkappa'} = \varphi(z) \left(\frac{dw}{d\varkappa'}\right)^{\alpha}$$

5° Ecrivons cette dernière sous la forme :

$$\frac{dz}{\varphi(z)} = \frac{1}{2^{\alpha}} w^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{dw}{d\varkappa'}\right)^{\alpha} d\varkappa'$$

et intégrons depuis z jusqu'à z_0, fraction de forcement et de $\varkappa'$ à $\varkappa'_0$. On aura :

$$\mathbf{M}(z) = \mathbf{M}(z_0) + \frac{1}{2^{\alpha}} \int_{\varkappa'_0}^{\varkappa'} w^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{dw}{d\varkappa'}\right)^{\alpha} d\varkappa'$$

On pourra, symboliquement tout au moins, tirer z de cette équation et poser :

$$z = F_1(z_0, w, \varkappa', \varkappa'_0)$$

en remarquant qu'à l'origine w est nul.

La première relation deviendra alors :

$$\varkappa' \frac{dw}{d\varkappa'} + (\gamma - 1) w = 2 F_1(z_0, w, \varkappa', \varkappa'_0)$$

d'où on intégrera, pour avoir w, sous la forme symbolique :

$$w = F_2(z_0, \varkappa', \varkappa'_0).$$

Cette relation est purement numérique, c'est-à-dire elle ne dépend pas du tout des conditions du chargement, en tant qu'elles ne sont pas comprises dans z_0, $\varkappa'$ et $\varkappa'_0$.

6° Si, comme le supposent MM. Gossot et Liouville, on

fait $z_0 = 0$, on voit, en remplaçant les lettres par leurs valeurs, que le produit $\frac{\mu v^2}{10 f \varpi}$ est une fonction des deux variables :

$$x' = \left(\frac{\mu}{10 f \varpi}\right)^{\frac{2\alpha - 1}{2(\alpha - 1)}} \left(\frac{A\mu^\alpha}{10^{\alpha - 1} \sigma}\right)^{-\frac{1}{\alpha - 1}} (c - \varpi')$$

(c volume de l'âme en un point)

et $$x'_0 = \left(\frac{\mu}{10 f \varpi}\right)^{\frac{2\alpha - 1}{2(\alpha - 1)}} \left(\frac{A\mu^\alpha}{10^{\alpha - 1} \sigma}\right)^{-\frac{1}{\alpha - 1}} (c' - \varpi')$$

(c' volume de la chambre à poudre).

Donc *Théorème I. — On peut construire une surface représentant la fonction*

$$w = F_2(x', x_0)$$

ou encore

$$w = F_3\left(x'_0, \frac{x'}{x'_0}\right) = F_3(x'_0, \theta)$$

et on obtient un point pour chaque valeur de la vitesse initiale mesurée.

C'est là la base de la méthode de compensation empirique donnée par les auteurs qui construisent avec les expériences de tir un plan côté, sur les axes x'_0 et θ.

7° On remarquera que ces formules deviennent illusoires dans le cas de $\alpha = 1$. Cela tient à ce que, dans l'équation (4), dc disparaît dans cette hypothèse ; la méthode de calcul ne peut plus s'appliquer sans modifications essentielles.

8° Pour les pressions, on écrira l'équation (2)

$$\frac{\mu}{10} \frac{v dv}{dc} = P$$

ou encore

$$\frac{1}{2} f\varpi \frac{d\left(\frac{\mu v^2}{10 f\varpi}\right)}{dc} = P$$

et en remarquant que :

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa'_0} = \frac{c - \varpi'}{c' - \varpi'}$$

d'où

$$dc = \frac{c' - \varpi'}{\varkappa_0} d\varkappa'$$

il viendra

$$\frac{1}{2\varkappa'_0} \frac{f\varpi}{c' - \varpi'} \frac{d\left(\frac{\mu v^2}{10 f\varpi}\right)}{d\varkappa'} = P$$

Or, d'après ce qui a été vu :

$$\frac{\mu v^2}{10 f\varpi} = F_2(\varkappa', \varkappa'_0).$$

Donc :

$$P = \frac{f\varpi}{c' - \varpi'} \frac{dF_2(\varkappa', x'_0)}{d\varkappa'} \frac{1}{2\varkappa'_0} = F_4(\varkappa', \varkappa'_0).$$

C'est la pression en un point quelconque.

Au point qui correspond au maximum de pression, il y a d'ailleurs une relation numérique entre $\varkappa'$ et $\varkappa'_0$. On aura ainsi pour formule de la pression maximum

$$P_M = P'F_5(\varkappa'_0).$$

Par suite *Théorème II. — Une courbe ayant pour coordonnées* $\frac{P_M}{P'}$ *et* $\varkappa'_0$ *est susceptible de représenter les variations de la pression maximum.*

§ 2. — Les formules de M. Sarrau

183. **Hypothèses.** — Le cas des poudres *à combustion quasi-constante* (160) avec un exposant α de pression, a été traité par M. Sarrau.

L'hypothèse relative à la *fonction de forme* $\varphi(z)$ est qu'elle peut se développer sous la forme :

$$\varphi(z) = 1 - \lambda z + \lambda_2 z^2 + \dots$$

On ne considère d'ailleurs que les deux premiers termes c'est-à-dire $\qquad \varphi(z) = 1 - \lambda z.$

M. Sarrrau suppose également $z_0 = 0$, la pression de forcement étant nulle.

Les trois équations du mouvement sont d'ailleurs comme au n° 182

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \sigma P$$

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z)\ P^\alpha$$

$$P(c - \varpi') + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu v^2}{10} = f\varpi z.$$

184. **Equation unique du mouvement.** Prenons pour variable c dans la première. On a :

$$\sigma x = 10(c - c')$$

et, par suite, la première équation devient

$$\mu \frac{d^2c}{dt^2} = \frac{\sigma^2}{10} P.$$

La troisième équation s'écrit alors :

$$(c' - \varpi') \frac{d^2c}{dt^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{dc}{dt}\right)^2 = \frac{10 f\varpi}{\mu} \left(\frac{\sigma}{10}\right)^2 z$$

Evaluons maintenant la fraction brûlée z.

On aura, en remplaçant dans la première équation $\varphi(z)$ par sa valeur :

$$(1 + \lambda z)\, dz = \mathrm{AP}^{\alpha} dt$$

d'où

$$z = \mathrm{A}\int_0^t \mathrm{P}^{\alpha} dt - \frac{1}{2}\lambda \mathrm{A}\left[\int_0^t \mathrm{P}^{\alpha} dt\right]^2 + \ldots$$

Remplaçant P par sa valeur, il viendra, en posant :

$$\mathrm{Y} = \int_0^t \left(\frac{d^2c}{dt^2}\right)^{\alpha} dt$$

la formule :

$$z = \mathrm{A}\left(\frac{10\,\mu}{\sigma^2}\right)^{\alpha} \mathrm{Y}\left[1 - \frac{\lambda}{2}\mathrm{A}\left(\frac{10\,\mu}{\sigma^2}\right)^{\alpha}\mathrm{Y} + \ldots\right].$$

L'équation *unique* du mouvement qu'il faut intégrer pour obtenir la solution du problème de la Balistique Intérieure sera donc, d'après M. Sarrau :

$$(c - \varpi')\frac{d^2c}{dt^2} + \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{dc}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{10\, f\varpi}{\mu}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^2 \mathrm{A}\left(\frac{10\,\mu}{\sigma^2}\right)^{\alpha}\mathrm{Y}\left[1 - \frac{\lambda}{2}\mathrm{A}\left(\frac{10\,\mu}{\sigma^2}\right)^{\alpha}\mathrm{Y} + \ldots\right].$$

185. **Changement de variables.** — Prenons comme nouvelles variables

$$\theta' = \frac{c - \varpi'}{c' - \varpi'} \qquad \text{et} \qquad t' = \mathrm{K}t$$

K étant une constante indéterminée.

On aura :

$$\frac{dc}{dt} = \mathrm{K}(c' - \varpi')\frac{d\theta'}{dt'}$$

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \mathrm{K}^2(c' - \varpi')\frac{d^2\theta'}{dt'^2}.$$

Remplaçant dans l'équation du mouvement et divisant le premier membre par $K^2(c' - \varpi')^2$, il viendra :

$$\theta' \frac{d^2\theta'}{dt'^2} + \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{d\theta'}{dt'}\right)^2 = \frac{10 f\varpi}{\mu}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^2 A\left(\frac{10\mu}{\sigma^2}\right)^\alpha K^{2\alpha-3}(c' - \varpi')^{\alpha-2}.$$

$$Y\left[1 - \frac{\lambda}{2} A\left(\frac{10\mu}{\sigma^2}\right)^\alpha K^{2\alpha-1}(c' - \varpi')^\alpha Y + \dots\right]$$

avec

$$Y = \int_0^{t'} \left(\frac{d^2\theta'}{dt'^2}\right)^\alpha dt'.$$

Le premier membre ne contient plus que les variables θ' et t' et le nombre $\frac{\gamma - 1}{2}$. Toutes les quantités *caractéristiques* de la poudre et du chargement se trouvent rassemblées dans deux termes du second membre : le facteur de Y avant le crochet et. dans le crochet, le facteur

$$A\left(\frac{10\mu}{\sigma^2}\right)^\alpha K^{2\alpha-1}(c' - \varpi')^\alpha$$

Si on poussait plus loin le développement de $\varphi(z)$ suivant les puissances de z, il est évident, d'après le mode de formation des coefficients de la série, que le même facteur accompagnerait toujours Y, à la première, deuxième et troisième puissance dans le développement en série.

On peut, maintenant, profiter de l'indétermination du coefficient K pour égaler à l'unité le facteur de Y avant le crochet. On posera donc :

$$K^{3-2\alpha} = \frac{10 f\varpi}{\mu}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^2 A\left(\frac{10\mu}{\sigma^2}\right)^\alpha (c' - \varpi')^{\alpha-2}$$

et le coefficient de Y, dans le crochet, qu'on désignera maintenant par ε, deviendra ;

$$\varepsilon = A\left(\frac{10\mu}{\sigma^2}\right)^\alpha (c' - \varpi')^\alpha \left[\frac{10 f\varpi}{\mu}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^2 A\left(\frac{10\mu}{\sigma^2}\right)^\alpha (c' - \varpi')^{\alpha-2}\right]^{\frac{2\alpha-1}{3-2\alpha}}$$

L'équation du mouvement sera alors la série suivante

$$\theta' \frac{d^2\theta'}{dt'^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{d\theta'}{dt'}\right)^2 = Y \left[1 - \frac{\lambda}{2} \varepsilon Y + \lambda' \varepsilon^2 Y^2 + \dots\right]$$

qui ne contient plus qu'un seul paramètre ε englobant toutes les variables du chargement. Pour les poudres à *combustion constante*, tous les termes du second membre, à l'exception du premier, disparaissent.

186. **Vitesses et pressions**. — M. Sarrau n'a pas cherché à intégrer l'équation ci-dessus ; il a simplement fait le raisonnement suivant.

Si on intègrait l'équation, ce serait sous la forme

$$f(\theta', t', \varepsilon) = 0$$

d'où on peut déduire

$$\frac{d\theta'}{dt'} = f_1(\theta', t', \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\theta'}{dt'^2} = f_2(\theta', t', \varepsilon)$$

En éliminant t' entre chacune des deux dernières et la première de ces trois équations, on aurait :

$$\frac{d\theta'}{dt'} = F(\theta', \varepsilon) \qquad \frac{d^2\theta'}{dt'^2} = \Phi(\theta', \varepsilon)$$

Supposons que $\frac{d\theta'}{dt'}$ et $\frac{d^2\theta'}{dt'^2}$ soient développés suivant les puissances du paramètre ε ; il viendra :

$$\frac{d\theta'}{dt'} = F(\theta') \left[1 + \varepsilon\lambda G(\theta') + \dots\right]$$
$$\frac{d^2\theta'}{dt'^2} = \Phi(\theta') \left[1 + \varepsilon\lambda \Gamma(\theta') + \dots\right]$$

Remontons aux variables primitives c et t.

On a :

$$v = \frac{dx}{dt} = K \frac{10}{\sigma} (c' - \varpi') \frac{d\theta'}{dt'}$$
$$P = \frac{10\mu}{\sigma^2} \frac{d^2c}{dt^2} = \frac{10\mu}{\sigma^2} (c' - \varpi') K^2 \frac{d^2\theta'}{dt'^2}.$$

On aura donc ainsi, en remarquant que la variable θ' est l'inverse de la variable θ introduite dans toute la théorie, les formules suivantes :

Pour les *vitesses*

$$v = \frac{10}{\sigma}(c' - \varpi')\left[\frac{10 f\varpi}{\mu}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^2 A\left(\frac{10\mu}{\sigma^2}\right)^\alpha (c'-\varpi')^{\alpha-2}\right]^{\frac{1}{3-2\alpha}} F(\theta)$$

$$\left[1+\lambda A\left(\frac{10\mu}{\sigma^2}\right)^\alpha (c'-\varpi')^\alpha\left[\frac{10 f\varpi}{\mu}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^2 A\left(\frac{10\mu}{\sigma^2}\right)^\alpha (c'-\varpi')^{\alpha-2}\right]^{\frac{2\alpha-1}{3-2\alpha}} G(\theta)\right].$$

Pour les *pressions* :

$$P = \frac{10\mu}{\sigma^2}(c' - \varpi')\left[\frac{10 f\varpi}{\mu}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^2 A\left(\frac{10\mu}{\sigma}\right)^\alpha (c'-\varpi')^{\alpha-2}\right]^{\frac{2}{3-2\alpha}} \Phi_1(\theta)$$

$$\left[1+\lambda A\left(\frac{10\mu}{\sigma^2}\right)^\alpha (c'-\varpi')^\alpha\left[\frac{10 f\varpi}{\mu}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^2 A\left(\frac{10\mu}{\sigma}\right)^\alpha (c'-'\varpi)^{\alpha-2}\right]^{\frac{2\alpha-1}{3-2\alpha}} \Gamma_1(\theta)\right]$$

M. Sarrau, en possession de ces développements, se propose alors simplement de les comparer aux formules empiriques de Gâvre, ce qui lui permet de fixer la valeur de l'exposant α et de déterminer une expression empirique des fonctions de θ laissées arbitraires dans ces formules.

Il y a lieu de remarquer ici que M. Sarrau n'admet pas que la poudre brûle complètement avant la sortie du projectile de l'âme du canon.

Ce sont ces mêmes formules qui ont été utilisées par le colonel Jacob dans sa théorie des Poudres B, avec un exposant $\alpha = \frac{3}{4}$.

L'exposant α, pris par M. Sarrau, est égal à $\frac{1}{2}$.

§ 3. — Intégration approchée des équations différentielles

187. Méthode employée. — L'intégration rigoureuse des 3 équations de la Pyrodynamique, dans le cas d'un exposant de pression α différent de l'unité, qui sont :

$$\mu \frac{dv}{dt} = \sigma P \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z)\, P^{\alpha} \tag{2}$$

$$P(c' - \varpi') + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu v^2}{10} = f\varpi z \tag{3}$$

paraissant impossible, nous emploierons ici une méthode d'approximation qui pourra être considérée comme la généralisation immédiate de la méthode rigoureuse employée au Chapitre v. Les formules auxquelles nous arriverons devont coïncider avec les formules exactes du § 6 n° 107 etc., quand on y fera $\alpha = 1$.

Le mode d'intégration adopté consistera à faire sortir du signe $\int$ certaines quantités variables remplacées par des valeurs constantes moyennes.

On peut aisément démontrer que cette opération, considérée en général, constitue un développement en série dont on conserve seulement le premier terme; dans la plupart des cas, cette série est même très convergente; elle ne contient que des termes de même parité relativement à l'argument (valeur moyenne — valeur exacte) qui sert au développement.

188. Intégrale de l'espace. — Commençons par faire subir à la troisième équation la même transformation qu'au n° 91, mais en y laissant la variable v.

On écrira :

$$\frac{\gamma - 1}{2} \frac{dc}{c - \varpi} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu\, vdv}{10\, f\varpi z} \frac{1}{1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10\, f\varpi} \frac{v^2}{z}}.$$

Comme au n° 91, on démontrera que la fraction du deuxième membre peut se développer en série par division et on écrira :

$$\frac{\gamma - 1}{2} \operatorname{Log} \frac{c - \varpi'}{c' - \varpi'} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \int_{z_0}^{z} \frac{v dv}{z}$$

$$+ \left(\frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \right)^2 \int_{z_0}^{z} \frac{v^3}{z^2} dv + \ldots$$

Cette première série, peu convergente, peut, ainsi qu'il a été expliqué au n° 91 et par la même méthode, être transformée en la suivante :

$$(4) \qquad 1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \int_{z_0}^{z} \frac{v dv}{z} + \ldots$$

On démontrerait également, comme au n° 95, que en ne prenant que le premier terme de la série, la troisième équation peut être simplifiée et remplacée par la suivante :

$$(5) \qquad P (c - \varpi')^{\frac{\gamma + 1}{2}} = f \varpi z \, (c' - \varpi')^{\frac{\gamma - 1}{2}}.$$

189. **Intégrale de la vitesse**. — Jusqu'ici, tout est rigoureux. C'est en combinant les deux premières équations pour avoir la vitesse, sous la forme :

$$dv = \frac{\sigma}{A \mu} P^{1-\alpha} \frac{dz}{\varphi(z)}$$

que nous serons obligé à des approximations.

On ne peut intégrer le deuxième membre qu'à la condition de faire sortir le facteur $P^{1-\alpha}$ du signe $\int$, ce qui a lieu automatiquement dans l'hypothèse d'une vitesse de combustion proportionnelle à la pression, c'est-à-dire quand $\alpha = 1$.

190. **Valeur moyenne de P**. — Nous pouvons obtenir la valeur moyenne Π de P, en cherchant quelle valeur il faudrait attribuer à P pour obtenir justement la valeur de la

vitesse v en partant de $x = 0$ et de $v = 0$. C'est remplacer ainsi, dans la loi de combustion en fonction de la pression, P par une moyenne.

Or, l'équation des forces vives, pour un parcours x du projectile donne

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{\pi a^2}{4}\int_0^x \mathrm{P}dx$$

et, par suite, la pression moyenne Π est donnée par la formule

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{\Pi a^2}{4}x.$$

Mais, comme on a, avec les unités choisies :

$$\frac{\Pi a^2}{4}x = 10\,(c - c'),$$

il viendra :

$$\Pi = \mu\,\frac{v^2}{20\,(c - c')}.$$

191. **Formule de la vitesse.** — Remplaçant, dans l'intégrale

$$dv = \frac{\sigma}{\mathrm{A}\mu}\,\mathrm{P}^{1-\alpha}\,\frac{dz}{\varphi(z)}$$

P par sa valeur moyenne Π et faisant sortir $\Pi^{1-\alpha}$ du signe $\int$, il viendra :

$$v = \frac{\sigma}{\mathrm{A}\mu}\left[\frac{\mu v^2}{20\,(c - c')}\right]^{1-\alpha}\left[\mathbf{M}(z) - \mathbf{M}(z_0)\right]$$

avec la fonction déjà rencontrée

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^z \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

En réduisant les termes semblables et en adoptant la notation $\mathbf{V}_{z_0}^{z}$ du n° 86, il viendra :

(6) $$v^{2\alpha-1} = \mathrm{R}\mathbf{V}_{z_0}^{z},$$

en posant

$$R = \frac{\sigma}{A\mu}\left[\frac{\mu}{20\,(c - c')}\right]^{1-\alpha}.$$

On a ainsi, en (6), une relation entre 3 variables, la vitesse v, le volume c et la fraction brûlée z.

192. **Formule de l'espace.** — Dans la formule (4), on remplacera v et dv par leurs valeurs et on aura :

$$d\left(1 - \left(\frac{c' - \varpi'}{c - \varpi'}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)$$

$$= \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\mu}{10\,f\varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^{2} P^{1-\alpha}\,\frac{dz}{z\varphi(z)}\int_{z_0}^{z} P^{1-\alpha}\,\frac{dz}{\varphi(z)}.$$

On intégrera en remplaçant $P^{1-\alpha}$ par sa valeur moyenne sous les deux intégrales ; il viendra alors :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\mu}{10\,f\varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^{2}\left[\frac{\mu v^2}{20\,(c - c')}\right]^{2-2\alpha}\int_{z_0}^{z} \mathbf{V}_{z_0}^{z}\,\frac{dz}{\varphi(z)}$$

L'intégrale du second membre introduit les mêmes fonctions balistiques (92)* que dans le cas de $\alpha = 1$ et par suite cette intégrale sera représentée par $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$.

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\mu}{10\,f\varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^{2}\left[\frac{\mu v^2}{20\,(c - c')}\right]^{2-2\alpha}\mathbf{W}_{z_0}^{z}$$

C'est une relation entre les trois variables v, c et z.

Mais on peut éliminer v entre cette équation et la relation (6). Il vient ainsi :

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\mu}{10\,f\varpi}\,R^{\frac{2}{2\alpha-1}}\,\mathbf{W}_{z_0}^{z}\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^{\frac{4(1-\alpha)}{2\alpha-1}}$$

ou encore :

$$(c-c')^{\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}}\left[1-\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]$$

$$=\frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\mu}{10f\varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^{\frac{2}{2\alpha-1}}\left(\frac{\mu}{20}\right)^{\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}}\mathbf{W}_{z_0}^{z}\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^{\frac{4(1-\alpha)}{2\alpha-1}}$$

Mais, on a

$$c-c'=c-\varpi'-(c'-\varpi')=(c'-\varpi')\left[\frac{c-\varpi'}{c'-\varpi'}-1\right]$$
$$=(c'-\varpi')\,(\theta^{-1}-1)$$

Posant :

$$\mathbf{r}_\alpha=\frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\mu}{10f\varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^{\frac{2}{2\alpha-1}}\left[\frac{\mu}{20\,(c'-\varpi')}\right]^{\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}}$$

comme définition d'un paramètre qui ne dépend que du chargement, il viendra :

$$(7)\quad [\theta^{-1}-1]^{\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}}\left(1-\theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)=\mathbf{r}_\alpha\,\mathbf{W}_{z_0}^{z}\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^{\frac{4(1-\alpha)}{2\alpha-1}}$$

et cette relation où, dans le premier membre, ne figure que la variable c fera connaître la fraction z par le second membre. On suppose, bien entendu, que des tables de ces fonctions ont été calculées.

z étant connu, on aura la vitesse v par la formule :

$$v=\left[\frac{\sigma}{A\mu}\right]^{\frac{1}{2\alpha-1}}\left[\frac{\mu}{20\,(c-c')}\right]^{\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}}\left[\mathbf{V}_{z_0}^{z}\right]^{\frac{1}{2\alpha-1}}$$

qui ne renferme que ces deux variables.

Le problème est donc résolu, pour la combustion incomplète de la charge.

On peut encore écrire l'équation de la vitesse sous la forme :

$$(8) \qquad v^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f\varpi}{\mu} \mathbf{r}_\alpha \left[\frac{V_{z0}^{z}}{(\theta^{-1} - 1)^{1-\alpha}} \right]^{\frac{2}{2\alpha - 1}}.$$

On remarquera que entre la fonction $\mathbf{r}_\alpha$ et la fonction $\varkappa_0'$ de MM. Gossot et Liouville (183, 6°), on a la relation

$$\varkappa_0' = \mathbf{r}_\alpha^{\frac{2\alpha - 1}{2(\alpha - 1)}}$$

et, en comparant les deux formules (1) et (2), on voit qu'en éliminant symboliquement z, on aura :

$$\frac{\mu}{10 f\varpi} v^2 = F(z_0, \mathbf{r}_\alpha, \theta) ;$$

c'est la forme généralisée de la loi d'homogénéité.

193. **Cas particuliers.** — 1° *Cas de* $\alpha = 1$. Le paramètre $\mathbf{r}_\alpha$ n'est pas sous forme illusoire, pour $\alpha = 1$, comme la fonction $\varkappa'$; il se réduit pour $\alpha = 1$, à la valeur :

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f\varpi} \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2$$

c'est-à-dire au paramètre $\mathbf{r}$ considéré dans la théorie (88)

2° *Cas de* $\alpha = \frac{1}{2}$.

Par contre, $\mathbf{r}_\alpha$ prend une forme illusoire pour $\alpha = \frac{1}{2}$; cela tient à ce que, par le mode approché d'intégration, la vitesse v disparaît de la formule ;

$$v = \frac{\sigma}{A\mu} \left[\frac{\mu v^2}{20(c - c')}\right]^{1-\alpha} \left[\mathbf{M}(z) - \mathbf{M}(z_0)\right]$$

comme c en disparaissait pour $\alpha = 1$.

Cette relation donne une équation entre z et θ, qui est :

$$[\theta^{-1} - 1]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{A\mu}\left[\frac{\mu}{20\,(c' - \varpi')}\right]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{z_0}^{z}$$

D'autre part, on a

$$[\theta^{-1} - 1]\left[1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right] = \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\mu}{10\,f\varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2\left[\frac{\mu}{20(c' - \varpi')}\right]v^2\mathbf{W}_{z_0}^{z}$$

comme seconde relation entre z, θ et v.

Le problème est donc résolu, pour ce cas particulier ; on a encore l'équation simple

$$1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{\mu}{10\,f\varpi}\,v^2\,[\mathbf{V}_{z_0}^{z}]^{-2}\,\mathbf{W}_{z_0}^{z}.$$

194. **Fin de la combustion.** — On a, au point (P_1, c_1) où finit la combustion, les formules :

$$\left[\theta_1^{-1} - 1\right]^{\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}}\left(1 - \theta_1^{\frac{\gamma-2}{1}}\right) = \mathbf{r}_\alpha\,\mathbf{W}_{z_0}^{1}[\mathbf{V}_{z_0}^{1}]^{\frac{4(1-\alpha)}{2\alpha-1}}$$

$$\mu V_2^1 = \frac{2}{\gamma - 1}\,10\,f\varpi\,\mathbf{r}_\alpha\left[\frac{\mathbf{V}_{z_0}^{1}}{\theta^{-1} - 1}\right]^{\frac{2}{2\alpha-1}}$$

$$P_1 = P'\theta_1^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

195. **Mouvement après la fin de la combustion.** — Après la fin de la combustion de la poudre, on a pour les pressions

$$P(c - \varpi')^\gamma = P_1(c_1 - \varpi')^\gamma$$

d'où

$$P(c - \varpi')^\gamma = P_1\,\frac{(c' - \varpi')^\gamma}{\theta_1^\gamma} = P'\,\frac{(c' - \varpi')^\gamma}{\theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}}}.$$

Par suite, le calcul qui a été fait au n° 103 pourra se reproduire identiquement, et on trouvera la formule

$$v^2 = V_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f\varpi}{\mu} \left[\mathbf{s}_\alpha - \frac{\theta^{\gamma-1}}{\mathbf{s}_\alpha} \right]$$

où $\mathbf{s}_\alpha$ aura maintenant comme définition

$$\mathbf{s}_\alpha = \theta_1^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

et sera donné par la première équation de la fin de la combustion, au moyen d'une table calculée d'avance de la fonction du premier membre.

On vérifie bien que, pour $\alpha = 1$, on trouve :

$$\mathbf{s} = 1 - \mathbf{rW}_{z_0}^1.$$

196: **Pression maximum.** — La condition du maximum de pression est la même qu'au n° 100, c'est-à-dire :

$$\frac{\gamma + 1}{2} \frac{dc}{c - \varpi'} = \frac{dz}{z}.$$

On désignera encore par ζ et χ les valeurs de z et de c correspondant au maximum.

Première équation entre P_M, ζ *et* χ. — De l'équation (4) on déduit en différentiant :

$$\mu \frac{vdv}{z} = 10 f\varpi (c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{dc}{(c - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}}}.$$

Remplaçant v et dv par leurs valeurs, on aura :

$$\mu \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 P^{1-\alpha} \frac{dz}{z\varphi(z)} \int_{z_0}^{z} P^{1-\alpha} \frac{dz}{\varphi(z)},$$

$$= 10 f\varpi (c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{dc}{(c - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}}.$$

On remplacera dz par sa valeur tirée de la condition du maximum et il restera comme équation satisfaite au point ζ, χ, P_M ;

$$\mu\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 P_M^{1-\alpha} \frac{1}{\varphi(\zeta)} \int_{z_0}^{\zeta} P^{1-\alpha} \frac{dz}{\varphi(z)} = 20 \frac{f\varpi}{\gamma+1} \left(\frac{c'-\varpi'}{\chi-\varpi'}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

Sous le signe $\int$ figure la variable P ; suivant le même procédé d'intégration approximative, qu'au n° 193 nous la ferons sortir du signe, en la remplacant par une constante qui sera ici $\frac{1}{2}P_M$, pour introduire la pression maximum et non la vitesse comme plus haut.

On aura ainsi :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} \mu \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 P_M^{2-2\alpha} \frac{V_{z_0}^{\zeta}}{\varphi(\zeta)} = \frac{2}{\gamma+1}\, 10\, f\varpi \left(\frac{c'-\varpi'}{\chi-\varpi'}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\gamma+1}\, 10\, f\varpi\, \theta_\chi^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

Deuxième équation entre P_M, ζ *et* χ. — On obtiendra cette deuxième équation en intégrant la relation après avoir fait sortir deux fois du signe $\int\int$ la variable P remplacée par $\frac{1}{2}P_M$.

On a ainsi :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2\alpha} \mu \left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2 P_M^{2-2\alpha} W_{z_0}^{\zeta}$$

$$= \frac{2}{\gamma-1}\, 10\, f\varpi \left[1 - \left(\frac{c'-\varpi'}{\chi-\varpi'}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right] = \frac{2}{\gamma-1}\, 10\, f\varpi \left[1 - \theta_\chi^{\frac{\gamma-1}{2}}\right].$$

Troisième équation entre P_M, ζ *et* χ. — Enfin, on a la relation

$$P_M (\chi - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}} = P'\zeta\, (c' - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}}$$

ou

$$P_M = P'\zeta\theta_\chi^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Calcul des éléments du point χ, ζ, P_M. — 1° Ajoutons les première et deuxième équations, ce qui éliminera $\theta_\chi^{\frac{\gamma-1}{2}}$ et donnera une relation entre P_M et ζ, qui est :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2\frac{\mu}{10f\varpi}P_M^{2-2\alpha}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}W^\zeta_{z0}+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{V^\zeta_{z0}}{\varphi(\zeta)}\right]=1.$$

2° On aura une deuxième relation en éliminant θ_χ entre la première et la troisième.

Il viendra :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{\gamma+1}{2}\frac{\mu}{10f\varpi}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2P_M^{2-2\alpha-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\frac{V^\zeta_{z0}}{\varphi(\zeta)}=[P'\zeta]^{-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

3° Divisant ces deux équations membre à membre, on obtiendra :

$$P_M=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{W^\zeta_{z0}}{V^\zeta_{z0}}\varphi(\zeta)+1\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}P'\zeta$$

relation qui fait connaître P_M quand on connaîtra ζ.

4° L'élimination de P_M entre l'équation ci-dessus et une des deux premières donnera ζ en fonction des conditions du chargement ; c'est :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)\frac{\mu}{10f\varpi}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}W^\zeta_{z0}+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{V^\zeta_{z0}}{\varphi(\zeta)}\right]$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{W^\zeta_{z0}}{V^\zeta_{z0}}\varphi(\zeta)+1\right]^{(2-2\alpha)\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}[P'\zeta]^{2-2\alpha}=1.$$

ce qui s'écrira :

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2\frac{\mu}{10\,f\varpi}\left(\frac{f\varpi}{c'-\varpi'}\right)^{2-2\alpha}\zeta^{2-2\alpha}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\mathbf{W}^{\zeta}_{z_0}+\frac{\mathbf{V}^{\zeta}}{\varphi(\zeta)}\right]^{1+(2-2\alpha)\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\mathbf{V}^{\zeta}_{z_0}}\right]^{(2-2\alpha)\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}=1$$

197. **Formules de la pression maximum.** — Posons :

$$\mathbf{k}_\alpha=\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{\sigma}{A\mu}\right)^2\frac{\mu}{10\,f\varpi}\left[\frac{f\varpi}{c'-\varpi'}\right]^{2-2\alpha}$$

$$\mathbf{Q}^{\zeta}_{z_0}(\alpha)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\zeta^{2-2\alpha}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\mathbf{V}^{\zeta}_{z_0}}\right]^{(2-2\alpha)\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\mathbf{W}^{\zeta}_{z_0}+\frac{\mathbf{V}^{\zeta}_{z_0}}{\varphi(\zeta)}\right]^{1+(2-2\alpha)\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$\mathbf{P}^{\zeta}_{z_0}(\alpha)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{\mathbf{W}^{\zeta}_{z_0}}{\mathbf{V}^{\zeta}_{z_0}}\varphi(\zeta)+1\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$\mathbf{R}^{\zeta}_{z_0}(\alpha)=\zeta\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{\mathbf{W}^{\zeta}_{z_0}}{\mathbf{V}^{\zeta}_{z_0}}\varphi(\zeta)+1\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

il viendra, en supposant des tables calculées :

1°
$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{1}{\mathbf{k}_\alpha}=\mathbf{Q}^{\zeta}_{z_0}(\alpha)$$

qui fait connaître la fraction brûlée ζ *au moment du maximum de pression, en fonction des conditions du chargement;*

2°
$$\frac{1}{\theta\chi} = \frac{\chi - \varpi'}{c' - \varpi'} = \mathbf{P}_{z_0}^{\zeta}(\alpha)$$

qui fait connaître le point χ *de l'âme où se produit le maximum*

3°
$$\mathrm{P}_{\mathrm{M}} = \mathrm{P}'\mathbf{R}_{z_0}^{\zeta}(\alpha)$$

qui fait connaître la pression maximum

198. **Résumé.** — On voit ainsi que, aussi bien pour les vitesses que pour les pressions, nous sommes parvenu à établir des formules qui affectent exactement la forme de celles des nos 110 et 111, auxquelles elles se réduisent d'ailleurs pour $\alpha = 1$.

Nous allons voir maintenant comment elles contiennent également les formules de M. Sarrau.

199. **Poudres à combustion quasi-constante.** — Cherchons, dans les mêmes conditions qu'au n° 162, c'est-à-dire pour $z_0 = 0$ et $\varphi(z) = 1 - \lambda z$ (λ petit) ce que deviennent les formules de la vitesse et de la pression maximum dans le cas d'un exposant α de pression.

On a (162)

$$\mathbf{V}_0^z = z\left(1 + \frac{\lambda}{2} z\right)$$

$$\mathbf{W}_0^z = z\left(1 + \frac{3}{4}\lambda z\right).$$

Les deux formules (7) et (8) de la vitesse avant la fin de la combustion deviennent alors;

$$[\theta^{-1} - 1]^{\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}}\left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right) = \mathbf{r}_\alpha z^{\frac{3-2\alpha}{2\alpha-1}}\left[1 + \left(\frac{3}{4} + \frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}\right)\lambda z\right]$$

$$\frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\mu}{10 f\varpi}v^2 = \mathbf{r}_\alpha[\theta^{-1} - 1]^{-\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}} z^{\frac{2}{2\alpha-1}}\left[1 + \frac{1}{2\alpha-1}\lambda z\right]$$

On peut éliminer z entre ces deux équations et obtenir la formule :

$$v = \left[\frac{2}{\gamma - 1}\,\frac{10 f \varpi}{\mu}\,\frac{A\mu}{\sigma}\left(\frac{20\,(c' - \varpi')}{\mu}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{3-2\alpha}} F_\alpha(\theta)$$

$$\left[1 - \frac{\lambda}{4}\,\frac{1}{3-2\alpha}\,\frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\mu}{10 f\varpi}\left[\frac{2}{-1}\,\frac{10 f\varpi}{\mu}\,\frac{A\mu}{\sigma}\left(\frac{20(c'-\varpi')}{\mu}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{2}{3-2\alpha}} G_\alpha(\theta)\right]$$

avec

$$F_\alpha(\theta) = [\theta^{-1} - 1]^{\frac{1-\alpha}{3-2\alpha}}\left[1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]^{\frac{1}{3-2\alpha}}$$

et

$$G_\alpha(\theta) = [\theta^{-1} - 1]^{\frac{2(1-\alpha)}{3-2\alpha}}\left[1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right]^{\frac{2\alpha-1}{3-2\alpha}}.$$

Vitesse à la fin de la combustion et après la fin.

Les formules sont celles du n° 196, où on a remplacé

$$V^1_{z_0} \quad \text{par} \quad 1 + \frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad W^1_{z_0} \quad \text{par} \quad 1 + \frac{3}{4}\lambda.$$

200. **Cas particuliers.** — *Vitesse avant la fin de la combustion.*

1° $\alpha = 0$. *La vitesse de combustion est indépendante de la pression (Piobert)*

$$v = \left[\frac{2}{\gamma - 1}\,\frac{10 f\varpi}{\mu}\,\frac{A\mu}{\sigma}\,\frac{20\,(c' - \varpi')}{\mu}\right]^{\frac{1}{3}} F_0(\theta)$$

$$\left[1 - \frac{\lambda}{4}\,\frac{1}{3}\,\frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\mu}{10 f\varpi}\left(\frac{2}{\gamma-1}\,\frac{10 f\varpi}{\mu}\,\frac{A\mu}{\sigma}\,\frac{20(c'-\varpi')}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}} G_0(\theta)\right]$$

avec

$$F_0(\theta) = (\theta^{-1} - 1)^{\frac{1}{3}}\left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$G_0(\theta) = (\theta^{-1} - 1)^{\frac{2}{3}}\left(3 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

2° $\alpha = \frac{1}{2}$. *Formules de M. Sarrau*

$$v = \left[\frac{2}{\gamma - 1}\,\frac{10 f\varpi}{\mu}\,\frac{A\mu}{\sigma}\left(\frac{20\,(c' - \varpi')}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\theta)$$

$$\left[1 - \frac{\lambda}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\mu}{10 f\varpi}\left(\frac{2}{\gamma-1}\,\frac{10 f\varpi}{\mu}\,\frac{A\mu}{\sigma}\left(\frac{20(c' - \varpi')}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right) G_{\frac{1}{2}}(\theta)\right]$$

avec

$$F_{\frac{1}{2}}(\theta) = (\theta^{-1} - 1)^{\frac{1}{4}}\left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$G_{\frac{1}{2}}(\theta) = (\theta^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

3° $\alpha = \frac{2}{3}$. *Hypothèse de MM. Gossot et Liouville,*

$$v = \left[\frac{2}{\gamma - 1}\,\frac{10 f\varpi}{\mu}\,\frac{A\mu}{\sigma}\left(\frac{20\,(c' - \varpi')}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{5}} F_{\frac{2}{3}}(\theta)$$

$$\left[1 - \frac{\lambda}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\mu}{10 f\varpi}\left(\frac{2}{\gamma-1}\,\frac{10 f\varpi}{\mu}\,\frac{A\mu}{\sigma}\left(\frac{20(c' - \varpi')}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} G_{\frac{2}{3}}(\theta)\right]$$

avec

$$F_{\frac{2}{3}}(\theta) = (\theta^{-1} - 1)^{\frac{1}{5}} \left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)^{\frac{3}{5}}$$

$$G_{\frac{2}{3}}(\theta) = (\theta^{-1} - 1)^{\frac{2}{5}} \left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

4° $\alpha = \frac{3}{4}$. *Formules du colonel Jacob*

$$v = \left[\frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \frac{A\mu}{\sigma} \left(\frac{20\,(c' - \varpi')}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{2}{3}} F_{\frac{3}{4}}(\theta)$$

$$\left[1 - \frac{\lambda}{4} \frac{2}{3} \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left(\frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \frac{A\mu}{\sigma} \left(\frac{20(c' - \varpi')}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} G_{\frac{3}{4}}(\theta)\right]$$

avec

$$F_{\frac{3}{4}}(\theta) = (\theta^{-1} - 1)^{\frac{1}{6}} \left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$G_{\frac{3}{4}}(\theta) = (\theta^{-1} - 1)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

5° $\alpha = 1$. *Formules du* n° 162

$$v = \left[\frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \frac{A\mu}{\sigma}\right] F_1(\theta) \left[1 - \frac{\lambda}{4} \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu}{10 f \varpi} \left[\frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f \varpi}{\mu} \frac{A\mu}{\sigma}\right]^2 G_1(\theta)\right]$$

avec

$$F_1(\theta) = 1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

$$G_1(\theta) = 1 - \theta^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Ainsi qu'on le voit en comparant la formule générale qui donne v, quel que soit α, à celle du n° 187, le mode d'intégration approché que nous avons adopté conduit *exactement* aux mêmes équations que la méthode de M. Sarrau, mais avec les avantages suivants :

1° il donne la valeur des coefficients numériques des formules ;

2° il donne l'expression des fonctions $\mathbf{F}(\theta)$ et $\mathbf{G}(\theta)$;

3° il n'est qu'un cas particulier d'une théorie beaucoup plus générale qui permet d'introduire, dans les formules, la fonction arbitraire $\varphi(z)$ et la fraction de forcement z_0.

201. **Pression maximum.** — Nous indiquerons seulement le premier terme de la série ; le second terme sera d'ailleurs très aisé à calculer. L'expression générale de la pression maximum est

$$P_M^{3-2\alpha} = \mathbf{K}_\alpha \left(\frac{A f \varpi}{\sigma}\right)^2 \frac{\mu}{c' - \varpi'}$$

avec

$$\mathbf{K}_\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \frac{20}{\gamma+1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + 1\right]^{-\gamma+1+(\gamma+1)4(\alpha-5)}$$

Pour diverses valeurs de α, on a

$\alpha = 0$ (Piobert)

$$P_M = \mathbf{K}_0 \left(\frac{A f \varpi}{\sigma}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\mu}{c' - \varpi'}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ (Sarrau)

$$P_M = \mathbf{K}_{\frac{1}{2}} \frac{A f \varpi}{\sigma} \left(\frac{\mu}{c' - \varpi'}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\alpha = \frac{2}{3}$ (Gossot-Liouville)

$$P_M = \mathbf{K}_{\frac{2}{3}} \left(\frac{Af\varpi}{\sigma}\right)^{\frac{6}{5}} \left(\frac{\mu}{c' - \varpi'}\right)^{\frac{3}{5}}$$

$\alpha = \frac{3}{4}$ (Jacob)

$$P_M = \mathbf{K}_{\frac{3}{4}} \left(\frac{Af\varpi}{\sigma}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\mu}{c' - \varpi'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$\alpha = 1$ (n° 164)

$$P_M = \mathbf{K}_1 \left(\frac{Af\varpi}{\sigma}\right)^2 \frac{\mu}{c' - \varpi'}.$$

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

—

202. **Divisions de la Balistique Intérieure.** — L'étude expérimentale et théorique de la combustion en vase clos ou *Pyrostatique*, — l'examen raisonné des phénomènes de la combustion dans le canon ou *Pyrodynamique physique* ; — le développement analytique des conséquences rigoureuses des hypothèses faites et des lois admises ou *Pyrodynamique rationnelle*, constituent les trois parties du présent Traité de Balistique Intérieure.

203. **Pyrostatique.** — A la base d'une science, on doit trouver la détermination expérimentale des lois physiques qui lui sont nécessaires et des *caractéristiques numériques* qui s'introduisent dans son développement.

Vouloir ramener une Science appliquée à des lois *premières*, n'est souvent que pure spéculation et une théorie qui veut être réelle et pratique doit se contenter, la plupart du temps, de lois *secondes* qui s'appliquent spécialement aux phénomènes complexes qu'elle étudie et se déduisent de leur examen direct.

La Pyrostatique admet trois lois *secondes*, qu'elle tire d'expériences en vase clos, comme l'interprétation la plus simple et la plus directe des tracés, qu'on peut enregistrer, des pressions de l'explosion en fonction du temps.

La *loi de Noble et Abel* relie la pression maximum P′ en

vase clos à la densité de chargement $\Delta = \frac{\varpi}{c'}$ par la formule

$$P' = f \frac{\Delta}{1 - \eta\Delta}.$$

On peut la rapprocher de la loi des gaz parfaits par la considération du covolume ; on la généralise en l'appliquant à un instant quelconque de la combustion et en posant $P = P'z$.

La variable z est la fraction de poudre brûlée au temps t.

La *seconde loi* est celle qui règle la vitesse de combustion $\frac{dz}{dt}$ et introduit la *fonction de forme* $\varphi(z)$. Ici, c'est la géométrie, comme loi première, qui a prétendu imposer aux balisticiens la forme nécessaire de la fonction $\varphi(z)$; mais la géométrie pure s'est montrée impuissante, sitôt qu'on a confronté les résultats auxquels elle conduit et l'expérience directe.

A une *qualité*, la rapidité $\frac{dz}{dt}$ d'émission des gaz par une charge de poudre en combustion, nous avons fait correspondre une *quantité* physique, qui est susceptible de mesure et qu'il est possible de déterminer par une expérience spéciale.

On a introduit ainsi, dans l'expression

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z),$$

les notions de *vivacité* d'une poudre caractérisée par le nombre A et de *forme* caractérisée par la fonction $\varphi(z)$ arbitraire à priori ; mais l'on peut, en général, empruntant à la géométrie seulement le moule d'une formule, représenter $\varphi(z)$ par l'équation $(1 - z)^{\beta}$ pour les applica-

tions aux poudres *dégressives* actuellement en usage et par $z^{\beta'}$ pour les poudres *progressives* ; β ou β' sont les *exposants de forme* ou simplement la *forme* de la poudre.

La *troisième loi* donne la vitesse de combustion $\frac{dz}{dt}$ en fonction de la pression sous la forme

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z)P^{\alpha},$$

α étant un exposant, dit de *pression*, dont la valeur est inconnue à priori.

En rapprochant cette relation de la loi de Noble et Abel $P = P'z$, on démontre deux théorèmes permettant, à l'aide de deux expériences en vase clos, avec une poudre donnée, de déterminer les exposants α et β et la *vivacité* A. Cette détermination se fait par la seule connaissance de la pression P_i qui correspond à l'inflexion du tracé de la courbe (P, t) obtenue en vase clos et de la tangente $\left(\frac{dP}{dt}\right)_i$ en ce point d'inflexion.

Sur ces trois lois expérimentales, la théorie de la combustion en vase clos peut s'établir complètement. On démontre, entre autres théorèmes, que, en choisissant une échelle convenable pour les pressions et les temps, toutes les courbes (P, t) de toutes les poudres ayant même fonction de forme $\varphi(z)$ obtenues dans l'explosion en vase clos, sont réductibles à une seule.

Les expériences montrent également que l'exposant α doit être pris égal à l'unité.

Le *genre* d'une poudre est caractérisé par les trois nombres : *f la force*, η *le covolume*, α *l'exposant de pression*.

L'*espèce* d'une poudre est caractérisée par un nombre β ou β' dit la *forme*.

La *variété* d'une poudre est caractérisée par le nombre A dit la *vivacité*.

On sait déterminer aisément et avec précision, par des expériences en vase clos, ces cinq *caractéristiques* des poudres.

204. **Pyrodynamique physique.** — La Pyrodynamique physique, discute la combustion de la poudre dans la bouche à feu.

La Thermodynamique offre une loi *première* à la Pyrodynamique sous la forme du théorème de l'égalité entre le potentiel de la poudre (qui, pour une charge ϖ, dont une fraction z est brûlée actuellement, est $f\varpi z$) et la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

Cette loi se traduit par la formule

$$P(c - \varpi') + \frac{n-1}{2}\,\frac{mv^2}{10} = f\varpi z$$

qu'on joindra à l'équation d'inertie

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sigma P$$

et à l'équation de combustion de la poudre

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z)\,P.$$

On aurait donc ainsi posé, d'un coup et à priori, les équations différentielles du mouvement.

Mais, ces équations supposent un nombre très considérable d'hypothèses particulières et chaque lettre, pour ainsi dire, dans ces équations, doit être accompagnée d'un commentaire qui en fixe le sens et en précise la valeur numérique.

C'est l'objet de la discussion des problèmes *secondaires* de la Balistique Intérieure que nous avons donnée ; ces problèmes se rangent sous les quatres titres suivants, énumération des objets en présence :

Termes secondaires *du projectile, du canon*, de *la charge*, de l'*atmosphère*.

Nous avons essayé de faire la nomenclature de tous les termes secondaires de chaque catégorie et examiné leur rôle, leur importance et leur mode d'action sur les constantes des équations différentielles précédentes.

Une interprétation nouvelle d'une théorie du Capitaine Hugoniot ; la notion de la veine gazeuse dans l'âme avec ses conséquences nombreuses ; l'explication de l'usure du canon, constituent les résultats pratiques, particulièrement neufs, obtenus dans cette partie de l'ouvrage.

La discussion physique de tous les phénomènes qui se passent dans la bouche à feu conduit nécessairement à attribuer à la loi thermodynamique posée une signification moins stricte et moins théorique et à la considérer plutôt comme une forme commode et logique de représentation des phénomènes de la détente. On demandera alors à l'expérience la détermination de nombres tels que l'exposant de détente γ (qui devra remplacer l'exposant n théoriquement égal au rapport, d'ailleurs inconnu, des deux chaleurs spécifiques des gaz de la poudre) ou la *masse fictive* $\mu = i\frac{p + 2\varpi}{g}$, qui doit être substituée à la masse réelle m du projectile.

Toutes les lettres des équations différentielles posées se présentent, après cet examen critique, comme les premiers termes de séries dont le développement est inconnu et où s'introduiraient successivement, dans des termes

d'ordre supérieur, toutes les influences, extrêmement complexes, qui, dans la pratique, en modifient un peu la valeur et qu'on est obligé de négliger en première approximation.

L'ambition de la Balistique Intérieure doit donc se borner à la détermination du terme principal de cette série ; l'étude ou théorique ou expérimentale des termes secondaires pourra ensuite se faire avec clarté et minutie en les rapportant méthodiquement au canevas du premier ordre qui aura ainsi été défini et calculé avec précision.

205. **Pyrodynamique rationnelle.** — L'étude physique et la discussion précédente permettent de réduire la Balistique Intérieure à un problème d'analyse pure qui est défini par trois équations différentielles simultanées :

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \sigma P$$

$$\frac{dz}{dt} = A\varphi(z) P$$

$$P(c - \varpi^{r}) + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu v^2}{10} = f\varpi z.$$

Nous avons montré que leur intégration rigoureuse était possible, mais sous une forme trop compliquée pour se prêter aux applications pratiques et à la discussion des tirs.

C'est par la voie des développements en série que nous sommes arrivé à une solution satisfaisante, pratique et simple. Deux séries différentes peuvent être développées : l'une, qui est très peu convergente, conduit, appliquée à

certains cas particuliers, aux formules du général Moisson et du colonel Mata; l'autre série, qui était totalement inconnue, même dans des cas particuliers, est au contraire, très convergente et c'est celle-là que nous étudions spécialement; elle équivaut à remplacer la dernière équation différentielle par la suivante

$$P(c - \varpi')^{\frac{\gamma+1}{2}} = f\varpi z(c' - \varpi')^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

qui représente le premier terme de son développement.

La solution du problème de la Balistique Intérieure est alors complète : on peut calculer, en chaque point de l'âme du canon, la vitesse du projectile lorsqu'il y passe, la pression qui s'y exerce et le temps du parcours; puis on connaîtra la pression maximum et celle de la fin de la combustion de la poudre et la position de ces deux points remarquables.

Les formules que nous donnons pour résoudre ces problèmes sont très simples de calcul et d'une forme extrêmement générale : elles conservent, en effet, sous forme symbolique, *la fonction de forme* $\varphi(z)$ et introduisent la pression *initiale de forcement* P_0.

La solution du problème ainsi acquise, nous avons pu écrire un chapitre sur les *théorèmes généraux de la Balistique Intérieure*, où sont discutées, le plus souvent sur les équations différentielles, les propriétés principales du mouvement. On y démontre, entre autres, les particularités des courbes des vitesses et des pressions dans l'âme à l'origine et au point singulier qui correspond à la fin de la combustion de la poudre; les cas où la pression maximum peut être imaginaire; où, la poudre ne peut totalement brûler, même dans un canon d'âme indéfinie; les

courbes de sécurité du canon, la théorie de la similitude des bouches à feu, etc., etc.

Dans le chapitre suivant, nous particularisons, au contraire, la fonction de forme $\varphi(z)$ en étudiant les poudres à *combustion constante*, limite qui n'est pas très éloignée de l'état de nos poudres actuelles. La fonction $\varphi(z)$ devient égale à l'unité et les formules acquerrent alors un haut degré de simplicité, ce qui permet de les interpréter et de les discuter avec plus de détail. Deux problèmes importants pour la pratique sont résolus :

1° Le problème de *la poudre du maximum* qui s'énonce ainsi : *un canon étant donné et la pression maximum étant fixée, quelle est la poudre* (A et Δ) *qu'il faut employer pour obtenir l'énergie initiale la plus considérable ;*

2° Le problème *du canon de puissance maximum : on se donne encore la pression maximum et on connaît la longueur du canon, et on se propose de déterminer le volume* c' *de la chambre à poudre et la poudre* (A et Δ) *qui donneront la plus grande énergie initiale.*

Des formules assez simples, réductibles en tables, donnent de ces deux problèmes la solution immédiate.

Nous présentons ensuite quelques considérations générales sur les expériences de tir et sur l'emploi de nos formules de Balistique Intérieure.

Outre les trois caractéristiques de la poudre f, A et β, il est nécessaire, pour les applications, de connaître trois *caractéristiques* du canon qui sont les nombres P_0, *pression de forcement*, *i coefficient* de μ, et *j coefficient* de A.

Ces nombres, dont l'analyse des phénomènes physiques de la combustion démontre la nécessité et indique la dépendance avec les modifications du chargement, peuvent

être déterminés par des expériences spéciales. Ils séparent, dans les formules, les influences des termes secondaires divers et individualisent les canons.

Nous donnons ensuite des *Formules différentielles* très simples pour l'usage courant des champs de tir et les discussions des rapports des Commissions d'expériences ; nous exposons enfin la question importante de la *Recette des poudres* par le tir telle qu'elle résulte, logiquement, de la théorie balistique que nous avons présentée.

Quant aux applications pratiques de nos formules, elles s'étendent à toutes les poudres, quelles qu'elles soient ; il suffira de spécifier la forme de la fonction $\varphi(z)$, de calculer avec cette fonction les tables des *Fonctions balistiques primaires* et *secondaires des poudres* et de porter, dans les formules, les valeurs des caractéristiques f et A qui conviennent à la poudre étudiée.

Pour les Poudres BM de la Marine française, M. le capitaine Sugot, de l'Artillerie coloniale, a bien voulu calculer les tables nécessaires et faire, ensuite, un nombre considérable d'applications numériques de nos formules aux tirs usuels.

On trouvera ces tables, avec des exemples de calculs, dans le Mémorial de l'Artillerie de la Marine [1].

Enfin, comme annexe à ce Traité de Balistique Intérieure, nous avons voulu faire connaître les principaux travaux mathématiques dûs à de savants balisticiens dans l'hypothèse plus générale d'un exposant de pression différent de l'unité : les théorèmes d'homogénéité de MM. le Général Gossot et de l'Ingénieur des Poudres et Salpêtres

[1] Ch. 4.

Liouville sur lesquels les auteurs ont basé des formules semi-empiriques pour les poudres de la Marine française ; le développement en série de M. Sarrau, pour les poudres à combustion quasi-constante, qui fut, pendant longtemps, en France, la base de l'enseignement officiel de la Balistique Intérieure et qui fut appliqué aux poudres BM par le Colonel Jacob.

Enfin, nous avons, dans cette hypothèse d'une loi de pression quelconque, donné une solution approchée du problème qui admet, comme cas particuliers d'une part, les formules rigoureuses de l'hypothèse $\alpha = 1$ et les formules de M. Sarrau, d'autre part.

206. **Les deux Balistiques.** — Il nous paraît ici digne d'intérêt, de rapprocher, non dans leurs équations et dans leurs détails, mais dans les principes généraux qui sont à leur base, les deux sciences de la Balistique, l'Extérieure et l'Intérieure,

Elles traitent de deux problèmes de Mécanique qu'aucun lien ne relie et qui se passent, pour ainsi dire, dans deux mondes différents, l'air et le feu. Les forces mises en jeu, les équations différentielles, les questions à résoudre n'ont aucun point de commum ; et, pourtant, l'application systématique d'une même méthode générale de recherche et des mêmes principes-guides a conduit, pour l'une et pour l'autre science, à une même solution, satisfaisante pour la théorie et la pratique, au même degré et par les mêmes moyens.

Comment peut-on formuler ce qu'il nous paraît possible de dégager de général des méthodes de ces deux sciences ?

1° En premier lieu, s'impose la séparation rigoureuse,

méthodique, minutieuse du *problème principal* et des *problèmes secondaires*. Tantôt, comme en Balistique Extérieure, la science sera assez avancée pour pouvoir séparément résoudre les seconds ; tantôt, comme en Balistique Intérieure, il faudra se contenter, provisoirement, de laisser arbitraire, dans les équations, la lettre qui contient symboliquement l'influence de chaque terme secondaire. En tous cas, on arrivera, pour le problème principal, à un énoncé simple, posant nettement la question sur le terrain de la Mécanique.

2° Après cette délimination intérieure, il importe, en second lieu, de délimiter extérieurement le domaine de la science traitée par une coupure franche avec les sciences trop générales qui ne l'englobent souvent que pour la rendre prétentieuse et vide dans ses théories, vague et imprécise dans ses applications.

En Balistique Extérieure, on partira de la fonction $F(v)$ de la résistance de l'air et on rejettera à une autre science, à venir, toute recherche théorique, thermodynamique, aérodynamique sur l'interprétation de cette fonction $F(v)$; on fait ainsi le départ entre la Physique et la Mécanique rationnelle.

En Balistique Intérieure, on rejettera comme d'un autre domaine, toute la théorie des Explosifs ou Pyrodynamique interne qui relie les propriétés de la poudre à sa composition chimique et aux théories des gaz. On considérera la poudre, comme elle est donnée à l'artilleur : c'est-à-dire une lamelle cornée qui dégage des pressions.

On cherchera, par expérience, les lois simples de la combustion en ne donnant à la géométrie que la place stricte qu'elle peut avoir dans la complexité d'un phéno-

mènè de ce genre ; le choix d'une variable convenable permettra de représenter par une *fonction de forme* $\varphi(z)$ l'infinie variété des poudres possibles, de même que, en Balistique Extérieure, la fonction $F(v)$ représentait symboliquement toutes les lois particulières de résistance de l'air.

On n'empruntera d'autre part à la Thermodynamique qu'une forme rationnelle pour l'équation de détente des gaz de la poudre et on évitera de demander à cette science ce qu'elle est impuissante à donner.

C'est à l'expérience de préciser cette loi de détente par la valeur d'un exposant γ, dont la signification, devenue nette parce qu'elle est susceptible d'une définition et d'une mesure, permettra à la Balistique Intérieure d'écrire ses équations différentielles.

3° Les équations posées, le problème passe du domaine physique et mécanique dans celui de l'analyse. Dans le développement de cette analyse, un principe guidera : celui de la conversation jalouse de la généralité de la fonction expérimentale, $F(v)$ pour la Balistique Extérieure, $\varphi(z)$ pour la Balistique Intérieure. On évitera, comme un écueil dangereux, toutes les intégrations explicites même si elles sont immédiates et on traitera toute la théorie en conservant des symboles généraux qui donneront, sous la forme la plus condensée et la plus claire, la solution complète de tous les problèmes possibles.

Cette règle de la conservation des fonctions expérimentales symboliques exige, évidemment, qu'on prenne pour variable indépendante la lettre qui y figure, soit v pour la Balistique Extérieure, soit z pour la Balistique Intérieure.

4° La discussion générale des propriétés du mouvement

en faisant varier systématiquement toutes les variables et en étudiant les conséquences analytiques des hypothèses faites jusqu'à leur extrême limite, donne une vue d'ensemble très claire et très précise sur l'ensemble de la science. On sait, en BalistiqueExtérieure, quelle belle suite de théorèmes généraux, les balisticiens et en particulier de Saint Robert ont fait connaître. Nous avons montré que la Balistique Intérieure peut être dotée d'un chapitre du même genre.

5° En sens inverse, pour ainsi dire, lorsqu'on voudra pénétrer dans le détail précis et numérique des faits et éclairer, par des exemples concrets, la théorie trop générale que représentent les fonctions balistiques, avec leurs formes arbitraires $\varphi(z)$ et $F(v)$, on sera amené à traiter des cas simples et des problèmes où la solution, analytiquement facile à développer, complètera la théorie générale.

C'est ainsi qu'en Balistique Extérieure, on consacrera un chapitre au cas où la fonction $F(v)$ prend la forme monôme $B_n v^n$; en Balistique Intérieure, le pendant de cette théorie sera l'étude des poudres à *combustion constante* $\varphi(z) = 1$.

6° La solution générale acquise, on voit alors, dans les deux sciences, se ranger avec ordre, autour d'elle, tous les travaux antérieurs, d'apparence et d'hypothèses qui paraissent souvent contradictoires et qui s'expliquent par la spécialisation plus ou moins poussée des fonctions générales de la théorie. On peut ainsi écrire très aisément un historique de la science d'un point d'où on domine l'ensemble.

7° Quant aux applications pratiques et numériques, elles exigent le calcul préalable de tables nécessaires de

fonctions transcendantes dites *fonctions balistiques*; ces tables renferment le degré de connaissance expérimentale qu'on possède à un moment donné sur les lois générales introduites symboliquement, par exemple F (v) en Balistique Extérieure, $\varphi(z)$ et γ en Balistique Intérieure. Et la théorie est assez souple et assez générale pour qu'elle ne puisse guère être accusée de faillite et d'impuissance, en cas de désaccord avec la pratique; celui-ci proviendra, en effet, ou d'une connaissance insuffisante de la valeur de quelques nombres, ou d'un terme secondaire négligé à tort, ou d'une extension indue hors des limites que la théorie apprend à connaître.

8° Il n'est pas jusque dans les détails du développement de la théorie qu'on ne retrouve une même marche dans les deux sciences.

Il est bien rare que les équations différentielles qui régissent les phénomènes physiques et mécaniques se prêtent à une intégration rigoureuse qui donne sous forme explicite et complète la solution du problème posé; ou bien alors, cette solution est exprimée sous une forme analytique si compliquée que la signification, la compréhension, et à plus forte raison, les applications en sont impossibles. Il arrive alors que la solution naturelle, la plus logique et la plus conforme à la nature bornée de l'esprit humain, est le développement en série de la solution. L'une et l'autre Balistique recourent à cette méthode et dans l'une et dans l'autre, c'est le choix convenable des séries adoptées qui donne la clef de toute la solution pratique du problème.

Ainsi, la série que nous avons donnée en Balistique Intérieure et qui représente le premier terme du développement de la solution du problème correspond, en

Balistique Extérieure, à la théorie du tir de plein fouet et aux formules de Siacci[1].

9° Jusqu'à quel point ces similitudes de principes et ces rapprochements de méthode peuvent-ils être étendus aux autres Sciences Appliquées, c'est ce que nous ne pouvons rechercher ici. Chacune d'elles, dans son propre champ, s'efforce d'asseoir ses bases expérimentales et de reconnaître ses lois physiques élémentaires, qui, le plus souvent, sont des lois secondes relativement aux lois premières qu'enseignent les Sciences Pures. Autour de la Mécanique rationnelle et régies par ses principes directeurs, les Sciences Appliquées se développent; comme des filiales issues d'une même maison-mère, elles vivent d'une vie indépendante, en exploitant avec méthode et minutie, en vue du rendement maximum, les domaines divers qu'il importe à la sécurité, aux besoins, aux intérêts ou à la curiosité de l'homme de mettre en valeur.

[1] La forme même des équations du mouvement avant combustion avec les fonctions

$$\mathbf{V}_{z_0}^{z} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_{z_0}^{z} = \mathbf{N} - \mathbf{N}_0 - \mathbf{M}_0 (\mathbf{L} - \mathbf{L}_0)$$

rappelle la forme des équations du tir de plein fouet

$$cx = \mathbf{D} - \mathbf{D}_0 \quad \text{et} \quad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{c^2}[\mathbf{A} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{J}_0 (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)]$$

Ce parallélisme prouve simplement que, pour $\mathbf{V}_{z_0}^{z}$ et cx, on a intégré une seule fois une fonction laissée sous forme générale, tandis qu'il a fallu une seconde intégration, dans les mêmes conditions, pour obtenir $\mathbf{W}_{z_0}^{z}$ et y.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

—

Baills (Lieutenant de vaisseau). *Traité de Balistique Rationnelle*, in-8 1883, Paris, Delagrave.

Berthelot. Observations sur le Mémoire de MM. Noble et Abel, relatif aux matières explosives. *Mémorial des P. et S.* T. I. 1881-83.

Billardon. Température développée dans les armes par le tir. *Mémorial des P. et S.* T. IX. 1897-98.

Bourgoin (C^omt^). 1. L'étude expérimentale des Poudres de guerre au Laboratoire. *Revue Générale des Sciences pures et appliquées.* 15 Février 1907.
2. Voir *Petavel.*

Charbonnier (C^omt^). 1. Formulaire de Balistique Intérieure. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XXXI. 1903.
2. Recherches expérimentales et théoriques sur la Balistique Intérieure. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XXXIII et XXXIV. 1905 et 1906.
3. Détermination expérimentale des caractéristiques des poudres BM. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* 3me Série. T. I. 1907.
4. Nouvelles formules de Balistique Intérieure. Application aux poudres BM. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* 3me Série. T. I. 1907.
5. *Balistique Extérieure rationnelle (Problème principal)*, in-18. Paris 1907. O. Doin (**E.S**).

Crémieux (C^ne^). Sur les conditions de recette des poudres épaisses. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XXXIV. 1906.

Dalémont (J.) L'usure des turbines. *Éclairage électrique* T. LII. 1907.

Desortiaux (E.), *Ingénieur des Poudres et Salpêtres.* Traité sur la poudre, in-8, 1878, Paris, Dunod.

Gavre (Con de) Archives de la.

Gautier (Cne). Poudres de guerre. Balistique Intérieure. *Lithographie de l'École d'Application de Fontainebleau*, 1898.

Gossot (Gl). 1. Sur le calcul des dispositions intérieures des bouches à feu de l'Artillerie Navale. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XXXI. 1903.

2. et Liouville (R). Sur les effets balistiques des poudres sans fumée dans les bouches à feu. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XXXIII. 1905. *Mémorial des P. et S.* T. XIII. 1905-1906.

3. Même titre. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* 3me Série. T. I. 1907.

Hélie et Hugoniot. *Traité de Balistique expérimentale*, in-12. Paris 1883. Gauthier-Villars.

Hoesen (Cne). *Cours de Balistique Intérieure.* Bruxelles. Castaignié. 1904.

Hugoniot (Cne). Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits. *Journal de l'École Polytechniqne LVII et LVIII, cahiers* 1877.

Hugoniot (Cne) et Sébert (Gl). Etude des effets de la poudre dans un canon de 10 c/m. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. X. 1882.

Jacob (Cl). Etude sur les effets de la poudre dans un canon de 16 centimètres à rallonges mobiles. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XXI. 1893.

Laboratoire central de la Marine. (L.C.M). Archives du.

Lachèvre (Cne). *Poudres de guerre. Balistique Intérieure.* Fontainebleau E. Bourges, 1877.

Lanfroy (Cl). Sur la cause des érosions dans l'âme des bouches à feu. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XIII. 1885.

Liouville (R.), Ingénieur des Poudres et Salpêtres.

1. Note sur quelques formules balistiques. *Mémorial des P. et S.* T. VI. 1893.

2. Sur les équations de la Balistique Intérieure. *Mémorial des P. et S.* T. VIII. 1893-96.

3. Voir Gossot et Liouville.

Mata (Colonel). 1. L'action des explosifs dans les armes. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XXX. 1900.

MATA (Colonel) 2. *Tradato de Balistica Interior.* Madrid Imprenta del cuerpo de artilleria, 1896.

MOISSON (G[l]). 1. Pyrodynamique. Théorie des explosions dans les canons et torpilles. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XIV. 1886.

2. Etude sur le tir des poudres B. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XXVI. 1898.

NOBLE et ABEL. Recherches sur les substances explosives. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. IV et *Mémorial des P. et S.* T. I. 1882-83.

PETAVEL. La pression des explosions. Expériences sur les explosifs solides et gazeux. (Traduction Bourgoin). *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. XXXIV. 1906.

PIOBERT (G[al]). *Traité d'Artillerie théorique et pratique*, in-12, Paris. Bachelier, 1847.

PITON-BRESSANT (C[ne]). *Mélanges*, in-12. Paris, 1892. Imprimerie Nationale.

RÉSAL (H). *Recherches sur le mouvement des projectiles dans les armes à feu*, in-12. Paris, Gauthier-Villars, 1864.

ROULIN (C[ne]). Poudres de guerre. Balistique Intérieure. *Lithographie de l'École d'Application de Fontainebleau*, 1884.

SAINT-ROBERT (C[l] de). *Mémoires Scientifiques. Balistique.* T. II. in-8°. 1872. Turin. Vincent Bona.

SARRAU (E). *Ingénieur des P. et S.*

1. Recherches théoriques sur les effets de la poudre et des substances explosives. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. I, 1873. T. II. 1874.

2. Nouvelles recherches sur les effets de la poudre dans les armes. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. IV. 1876.

3. Formules pratiques des vitesses et des pressions dans les armes. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. IV. 1877.

4. Note sur les formules des vitesses et des pressions dans les armes. *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.* T. VI. 1878.

5. Recherches théoriques sur le chargement des bouches à feu. *Mémorial des Poudres et Salpêtres.* T. I. 1882-83.

Sarrau (E.). 6. Introduction à la théorie des explosifs. *Mémorial des Poudres et Salpêtres*. T. V. 1892.

7. Théorie des explosifs. *Mémorial des Poudres et Salpêtres*. T. VII. 1894.

8. Formules monômes des vitesses dans les armes. *Mémorial des Poudres et Salpêtres*. T. I. 1882-83.

9. Formules de la pression maximum dans les armes. *Mémorial des Poudres et Salpêtres*. T. I. 1882-83.

Sebert et Hugoniot. Voir Hugoniot.

Terquem (C[omt]). Sur l'organisation des rayures des canons. *Revue d'Artillerie*. T. XIII. 1879.

Vallier (L[t]-C[l]). 1. *Balistique des nouvelles poudres*, Paris, sans date. Gauthier-Villars (Encyclopédie Léauté).

2. Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. *Mémorial des Poudres et Salpêtres*. T. X. 1899-1900.

3. Loi des pressions dans les bouches à feu. *Mémorial des Poudres et Salpêtres*. T. XI. 1901-1902.

4. Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. *Mémorial des Poudres et Salpêtres*. T. XII. 1903-1904.

Vieille. (*Ingénieur des Poudres et Salpêtres*).

1. Etude des pressions ondulatoires produites en vase clos par les explosifs *Mémorial des Poudres et Salpêtres* T. III. 1890.

2. De l'influence du covolume des gaz sur la vitesse de propagation des phénomènes explosifs. *Mémorial des Poudres et Salpêtres*. T. IV. 1891.

3. Etude sur le mode de combustion des substances explosives. *Mémorial des Poudres et Salpêtres*. T. VI. 1893.

4. Etude sur les phénomènes d'érosion produits par les explosifs. *Mémorial des Poudres et Salpêtres*. T. XI. 1901-1902.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES MATIÈRES

TABLE SYSTÉMATIQUE DES MATIÈRES

Balistique Intérieure

CHAPITRE IV

Les équations différentielles de la Pyrodynamique.

TROISIÈME PARTIE

Pyrodynamique rationnelle

CHAPITRE V

Les formules de la Balistique Intérieure.

CHAPITRE VI

Les théorèmes généraux de la Balistique Intérieure.

CHAPITRE VII

Les poudres à combustion constante.

CHAPITRE VIII

Les expériences de tir

CHAPITRE IX

Cas d'un exposant quelconque de la pression.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE.